

§10 Das Lokale Kolmogoroff-Kriterium bei der Konstruktion
besserer Approximationen

Es sei $f \in C(I)$ und $E(a) \in V_N$ gegeben.

Zum Beweis von Theorem 89 in [12] (Satz 2.10 in [24])
 wird gezeigt:

Gibt es ein $b \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $(b, \text{grad}(E(a, x_k))) (f(x_k) - E(a, x_k)) > 0$
 für $1 \leq k \leq m$, wobei $\{x_k | 1 \leq k \leq m\}$ die Menge der Extremalpunkte
 von $f - E(a)$ in I ist, dann gibt es ein $C > 0$, so daß

$$\|f - E(a + cb)\|_I < \|f - E(a)\|_I$$

für $c \in (0, C)$ erfüllt ist.

Es sei $E(a, x) = \sum_{i=1}^N a_i e^{t_i x}$. Gibt es in V_N^0 bessere Approximationen

als $E(a)$ für f , so wird zur Konstruktion besserer Approximationen
 folgender Ansatz nahegelegt, falls $f - E(a)$ endlich viele
 Extremalpunkte in I besitzt:

1. Man löse die lineare Optimierungsaufgabe

$$(10.1) \quad (f(x_k) - E(a, x_k)) \sum_{i=1}^N (b_i + b_{N+i} a_i x_k) e^{t_i x_k} - \mu \geq 0 \quad 1 \leq k \leq m$$

$$(10.2) \quad \begin{array}{ll} b_i & \geq -1 \\ b_i & \leq +1 \end{array} \quad 1 \leq i \leq 2N$$

$$\mu = \text{Max!}$$

mit den Unbekannten $\mu, b_i, 1 \leq i \leq 2N$; dabei besitzt $f - E(a)$ in I ge-
 nau m Extremalpunkte $x_k, 1 \leq k \leq m < \infty$.

2. Erhält man eine Lösung mit $\mu > 0$, dann setze man $c := 1$ und
 bestimme durch sukzessives Halbieren ein $c > 0$ mit

$$\|f - E(a + cb)\|_I < \|f - E(a)\|_I,$$

wobei $b = (b_1, \dots, b_{2N})$ ist.

Hierzu ein Beispiel:

Es ist $N=3$ und $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $I = [0, 1]$; die Approximation wird
 auf $X = \{\frac{i}{100} | 0 \leq i \leq 100\}$ durchgeführt.

Die Ausgangsfunktion $E(a)$ ist gegeben durch die Parameter

$$\begin{array}{ll} a_1=0.053\ 824\ 480 & t_1=-4.282\ 493\ 872 \\ a_2=0.400\ 482\ 842 & t_2=-1.540\ 603\ 343 \\ a_3=0.545\ 644\ 214 & t_3=-0.277\ 434\ 496 \end{array} \quad (\text{Zeichnung 27})$$

1. Iterationsschritt:

Es ist hier $m=1$ und $x_1=0.0$; als Lösung des Optimierungsproblems erhält man $b_1=b_2=b_3=1.0$, $b_4=b_5=b_6=0.0$, $\mu=0.000\ 145$. Eine bessere Approximation erhält man mit $c=2^{-17}$:

$$\begin{array}{ll} a_1=0.053\ 832\ 109 & t_1=-4.282\ 493\ 872 \\ a_2=0.400\ 490\ 472 & t_2=-1.540\ 603\ 343 \\ a_3=0.545\ 651\ 843 & t_3=-0.277\ 434\ 496 \end{array} \quad (\text{Zeichnung 105})$$

2. Iterationsschritt:

Es wird hier $m=2$, $x_1=0.0$, $x_2=0.13$ verwendet. Als Lösung des Optimierungsproblems erhält man $b_1=b_2=b_3=1.0$, $b_4=b_5=b_6=0.0$, $\mu=0.000\ 077$. Eine bessere Approximation erhält man mit $c=2^{-20}$:

$$\begin{array}{ll} a_1=0.053\ 833\ 063 & t_1=-4.282\ 493\ 872 \\ a_2=0.400\ 491\ 426 & t_2=-1.540\ 603\ 343 \\ a_3=0.545\ 652\ 797 & t_3=-0.277\ 434\ 496 \end{array} \quad (\text{Zeichnung 106})$$

Bei Fortsetzung der Iteration erhält man keine wesentlich bessere Approximation mehr: c muß von Schritt zu Schritt kleiner gewählt werden und als Lösung der Optimierungsaufgabe erhält man $b_1=b_2=b_3=1.0$, $b_4=b_5=b_6=0.0$; an den Frequenzen wird also nichts geändert. Dies gilt auch dann, wenn man m größer wählt.

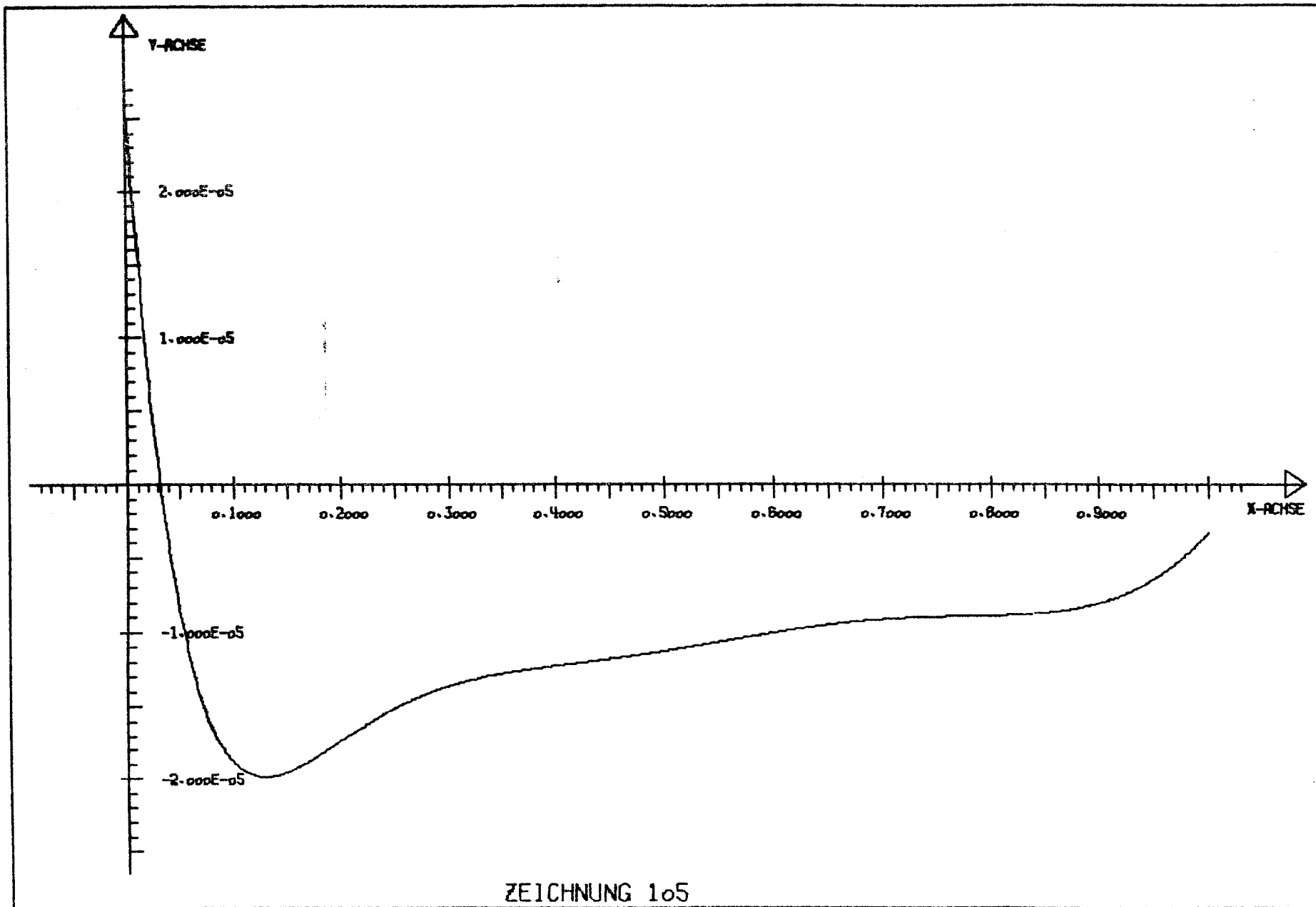
Es sei $E(a)$ die hier gegebene Startfunktion, $E(a')$ die mit dem achten Iterationsschritt von 7.4A gegebene Lösung und $(b_1, \dots, b_6) = a' - a$; die b_i erfüllen die Restriktionen (10.2) und mit diesen Werten folgt aus (10.1) für μ :

$$\mu \leq 2.4 \cdot 10^{-9}.$$

Aus diesen Ergebnissen kann man folgern, daß im allgemeinen das Verfahren in dieser Form für die praktische Ermittlung von Minimallösungen wenig brauchbar ist, da hierfür μ nicht maximal sein muß.

Bemerkung:

Die Optimierungsaufgabe ist nach dem Simplex-Algorithmus mit dem FORTRAN-Unterprogramm SIMPX des Rechenzentrums gelöst worden.



ZEICHNUNG 105

