§8 Approximationen für die Riemannsche Zetafunktion nach dem Newtonschen Iterationsverfahren

Zur Erprobung des Newtonschen Iterationsverfahrens von Abschnitt 6.2 werden für die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

in [2,3] und [2,4] Approximationen aus V_N für $1\leqq N\leqq 4$ ermittelt.

Die Startfunktionen, die die Voraussetzung (6.1o) erfüllen, sind nach dem Verfahren von Meinardus berechnet worden; es werden jeweils die Punkte x_o und x_{2N-1} mit h angegeben.
Aus den gleichen Gründen wie in §7 wird auch hier die Approximation auf einer diskreten Punktmenge X durchgeführt:

$$X=\{2+i\frac{1}{256} \mid o\leqq i\leqq 256d\}$$

Dabei ist d=1, falls auf [2,3], und d=2, falls auf [2,4] approximiert wird.
Für jeden Iterationsschritt werden die Punkte $x_o,\ldots,x_{2N}$ aus X (ohne zu runden) angegeben, mit denen das Newtonsche Verfahren zur Lösung von (6.11) durchgeführt wird; in diesen Punkten hat die durch die Startfunktion bzw. die durch die im vorhergehenden Iterationsschritt ermittelte Näherung E gegebene Fehlerfunktion $F=\zeta-E$ ein lokales Extremum für $x\in X$.
Nach jedem Schritt mit dem Newton-Verfahren werden die neu ermittelten Parameter a_i,t_i für $1\leqq i\leqq N$ und die Werte F_i der entsprechenden Fehlerfunktion angegeben:

$$F_i=\zeta(x_i)-\sum_{j=1}^{N}a_je^{t_jx_i}\qquad o\leqq i\leqq 2N\ .$$

Dabei wird zur Durchführung eines jeden Iterationsschrittes nach Newton verfahren, bis erfüllt ist:

$$\frac{\max\limits_{o\leqq j\leqq 2N}|F_j|}{\min\limits_{o\leqq j\leqq 2N}|F_j|}\leqq 1.2\ ;$$

eine derartige Vorschrift ist wesentlich, wie die Approximationen für $N \geq 2$ zeigen.
Wie in §7 wird im Anschluß an jede Iteration eine Auswertung der letzten Fehlerfunktion (für das ganze Intervall) zur Abschätzung der Minimalabweichung und der erreichten Genauigkeit angegeben. Es sind dabei die Abschätzungen (8.3) zu berücksichtigen: Für die Nullstellen und die lokalen Extrema im Innern des betreffenden Intervalles werden in Klammern eine obere Schranke für den Betrag des Fehlers angegeben. Abschätzungen für die Genauigkeit der Funktionswerte sind durch (8.3) gegeben.

Numerische Auswertung von $\zeta(x)$

Die Auswertung von $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ für $x>1$ wird durch Anwendung der Eulerschen Summenformel nach K.Knopp, [1o], vorgenommen; alle Seitenangaben beziehen sich auf [1o].
Es gilt für $k \in \mathbb{N}$ (S.549):

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{B_{2i}}{(2i)!} \prod_{j=0}^{2i-2} (x+j) \right) - R_k(x) \quad ,x>1,$$

mit
$$R_k(x) = \prod_{i=0}^{2k} (x+i) \int_1^{\infty} \frac{P_{2k+1}(t)}{t^{x+2k+1}}\, dt \quad .$$

Die Größen B_i sind die Bernoulli-Zahlen (S.185)
$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=B_5=B_7=\ldots=0, B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ \ldots\ ;$

die Bernoulli-Polynome P_{2k} und P_{2k+1} sind gegeben durch (S.541)

$$(8.1)\qquad \begin{aligned} P_{2k}(t) &= (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos 2n\pi t}{(2n\pi)^{2k}} \\ P_{2k+1}(t) &= (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin 2n\pi t}{(2n\pi)^{2k+1}} \end{aligned} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Es wird k=3 verwendet:

$$(8.2)\qquad R_3(x) = \prod_{i=0}^{6} (x+i) \left[\int_1^{10} \frac{P_7(t)}{t^{x+7}}\, dt + \int_{10}^{\infty} \frac{P_7(t)}{t^{x+7}} dt \right]$$

Mit $P_7(t) = \frac{1}{7!} \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} B_i x^{7-i}$ (S.542) erhält man nach umfangreicher, jedoch elementarer Rechnung

$$\int_1^{10} \frac{P_7(t)}{t^{x+7}}dt = \sum_{n=1}^{9} \int_n^{n+1} \frac{P_7(t)}{t^{x+7}}dt = -\sum_{n=1}^{9} \frac{(n+1)^{-x}}{\prod_{i=0}^{6}(x+i)} + \frac{1-10^{-x-5}}{7!\,6(x+6)(x+5)} +$$

$$+ \frac{10^{-x-3}-1}{6!\prod_{i=3}^{6}(x+i)} + \frac{1-10^{-x-1}}{12\prod_{i=1}^{6}(x+i)} + \frac{10^{-x}-1}{2\prod_{i=0}^{6}(x+i)} + \frac{1-10^{-x+1}}{(x-1)\prod_{i=0}^{6}(x+i)}$$

Zur Abschätzung von

$$R(x) := \prod_{i=0}^{6}(x+i) \int_{10}^{\infty} \frac{P_7(t)}{t^{x+7}}dt$$

wird $|P_k(t)| \leqq \frac{2}{(2\pi)^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}$, benutzt, was aus (8.1) folgt.

Mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$ (S.245) für $k \in \mathbb{N}$ erhält man speziell für P_{2k+1}:

$$|P_{2k+1}(t)| \leqq \frac{2}{(2\pi)^{2k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} < \frac{2}{(2\pi)^{2k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \quad k \in \mathbb{N}$$

Es folgt:

$$|R(x)| < \prod_{i=0}^{6}(x+i) \frac{B_6}{2\pi 6!} \int_{10}^{\infty} t^{-x-7}dt = \prod_{i=0}^{6}(x+i) \frac{B_6}{2\pi 6!} \frac{1}{x+6} 10^{-x-6} =$$

$$= \frac{B_6}{2\pi 6!} \prod_{i=0}^{5}(x+i)\ 10^{-x-6}$$

$|R(x)|$ ist in $(1.1072, \infty)$ monoton fallend; spezielle Werte:

$$(8.3) \qquad |R(x)| < \begin{cases} 2.7 \cdot 10^{-10} & : x \geqq 2.0 \\ 1.8 \cdot 10^{-10} & : x \geqq 2.5 \\ 1.1 \cdot 10^{-10} & : x \geqq 3.0 \\ 0.6 \cdot 10^{-10} & : x \geqq 3.5 \\ 3.2 \cdot 10^{-11} & : x \geqq 4.0 \end{cases}$$

Mit (8.2) erhält man nach einigen Zwischenrechnungen:

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2!}\,x + \frac{B_4}{4!}\,x(x+1)(x+2) + \frac{B_6}{6!}\,x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) -$$

$$- \prod_{i=o}^{6}(x+i)\int_{1}^{1o}\frac{P_7(t)}{t^{x+7}}\,dt - R(x) =$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{9}\frac{1}{n^x} + \frac{x(x+1)(x+2)\left[(x+3)(x+4)-42oo\right]}{3o24o\cdot 1o^{x+5}} +$$

$$+ \frac{1}{1o^{x+1}}\left(\frac{x}{12} + \frac{5x+95}{x-1}\right) - R(x)\,, \qquad x>1\,.$$

Für die folgenden Berechnungen von $\zeta(x)$, $x \in [2,4]$, wird $R(x)$ vernachlässigt. Abschätzungen für den hierdurch entstehenden Fehler sind also mit (8.3) gegeben.

APPROXIMATION DER ZETA-FUNKTION IN [2,3] MIT N=1

ERMITTLUNG DER STARTFUNKTION:

MIT X0=2.333, X1=2.666 ERHAELT MAN:

A1=0.27933905734830+01 T1=-0.29153551830 4D+00

(ZEICHNUNG 48)

1.ITERATIONSSCHRITT

DIE PUNKTMENGE:

X0=2.00000000 X1=2.48828125 X2=3.00000000

ERSTER SCHRITT NACH NEWTON ERGIBT:

A1=0.30571255061 7D+01 T1=-0.32167620404 40D+00

F0= 0.3832997880D-01 F1=-0.2701033070D-01 F2= 0.3737677030D-01

(ZEICHNUNG 49)

ZWEITER SCHRITT NACH NEWTON ERGIBT:

A1=0.30648347576 0D+01 T1=-0.32110217693 1D+00

F0= 0.3242837200D-01 F1=-0.3244043560D-01 F2= 0.3242729500D-01

(ZEICHNUNG 50)

2.ITERATIONSSCHRITT

DIE PUNKTMENGE:

X0=2.00000000 X1=2.39453125 X2=3.00000000

ERSTER SCHRITT NACH NEWTON ERGIBT:

A1=0.30642946375 7D+01 T1=-0.32138090863 4D+00

F0= 0.3361105010D-01 F1=-0.3361194240D-01 F2= 0.3361087790D-01

(ZEICHNUNG 51)

AUSWERTUNG DER FEHLERFUNKTION:

DIE NULLSTELLEN	LOKALE EXTREMA UND FUNKTIONSWERTE	
	2.000000	+0.03361105014
2.09345035		
	2.394200 (2.8D-5)	-0.03361197422
2.79299502		
	3.000000	+0.03361087793

APPROXIMATION DER ZETA-FUNKTION IN [2,4] MIT N=1

ERMITTLUNG DER STARTFUNKTION:

MIT X0=2.666, X1=3.333 ERHAELT MAN:

A1=0.2015963567390+01 T1=-0.1693961397650D+00

(ZEICHNUNG 52)

1.ITERATIONSSCHRITT

DIE PUNKTMENGE:

X0=2.00000000 X1=2.96484375 X2=4.00000000

ERSTER SCHRITT NACH NEWTON ERGIBT:

A1=0.2428472819360D+01 T1=-0.2227497858080D+00

F0= 0.8948698190-01 F1=-0.4546128580-01 F2= 0.8605281430-01

(ZEICHNUNG 53)

ZWEITER SCHRITT NACH NEWTON ERGIBT:

A1=0.2452441588300D+01 T1=-0.2203643890950D+00

F0= 0.6662459930-01 F1=-0.6683502990-01 F2= 0.6657539360-01

(ZEICHNUNG 54)

2.ITERATIONSSCHRITT

DIE PUNKTMENGE:

X0=2.00000000 X1=2.67968750 X2=4.00000000

ERSTER SCHRITT NACH NEWTON ERGIBT:

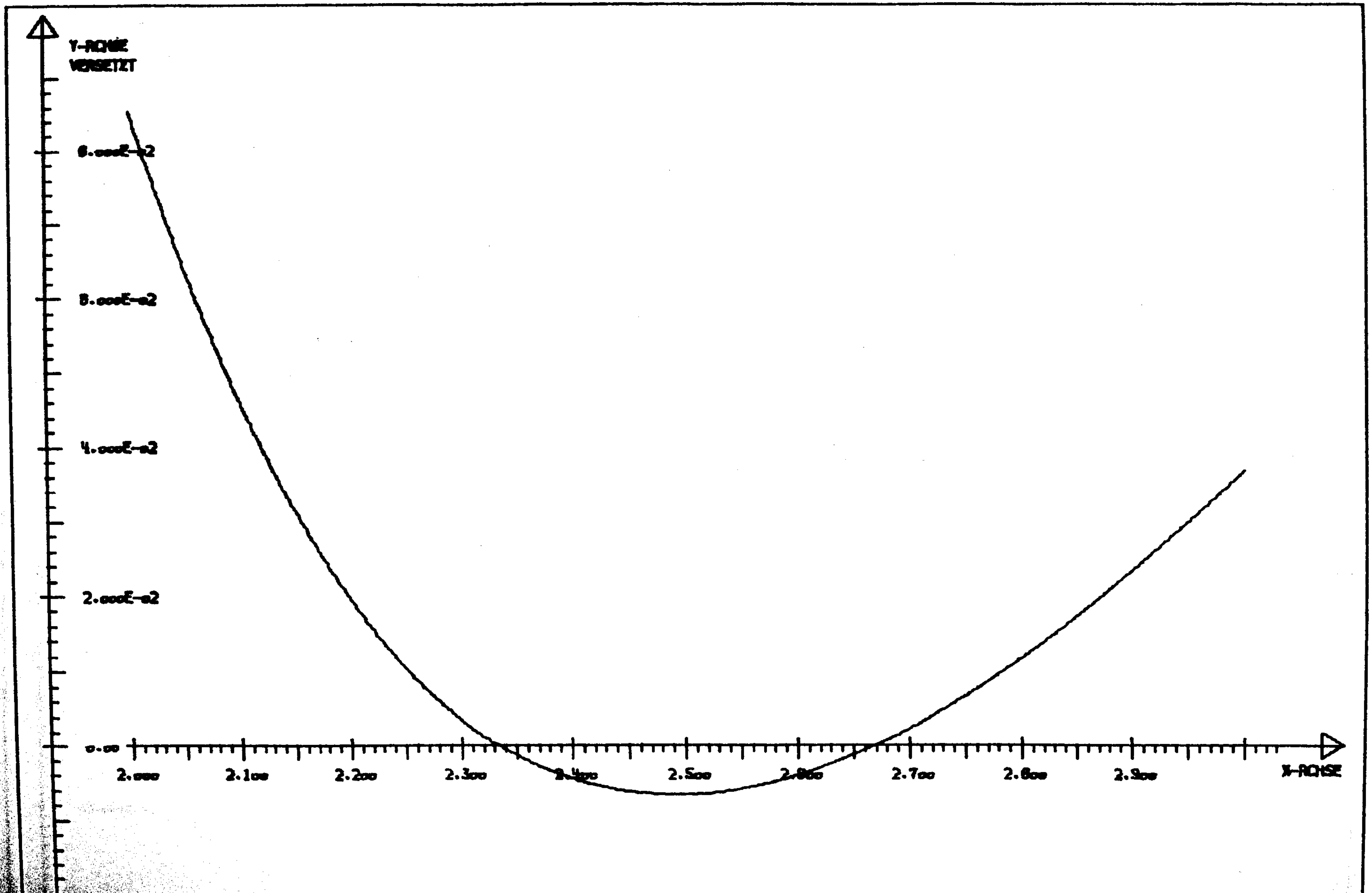
A1=0.244849530809D+01 T1=-0.221417260251D+00

F0= 0.724773952D-01 F1=-0.724977833D-01 F2= 0.724703759D-01

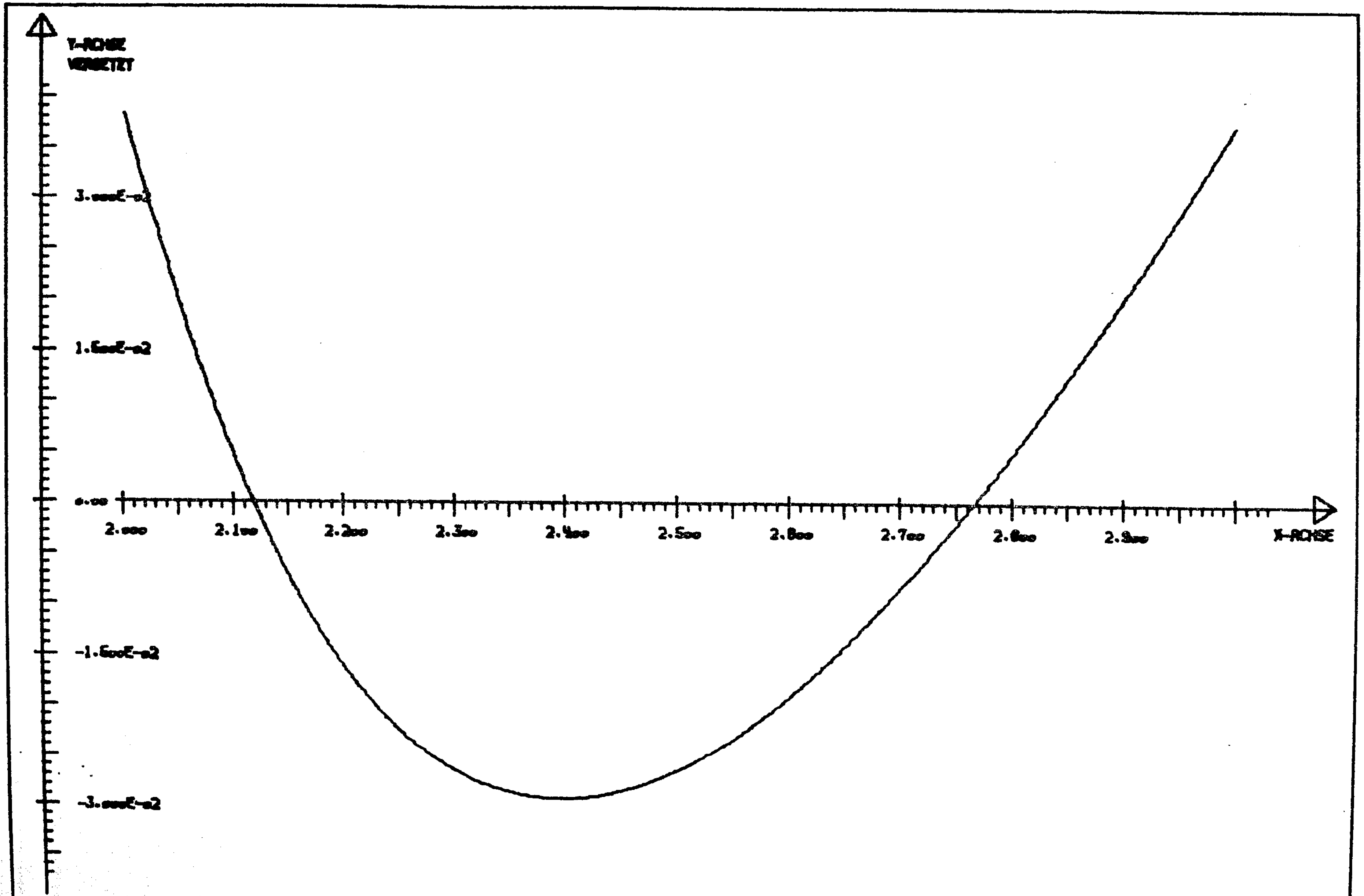
(ZEICHNUNG 55)

AUSWERTUNG DER FEHLERFUNKTION:

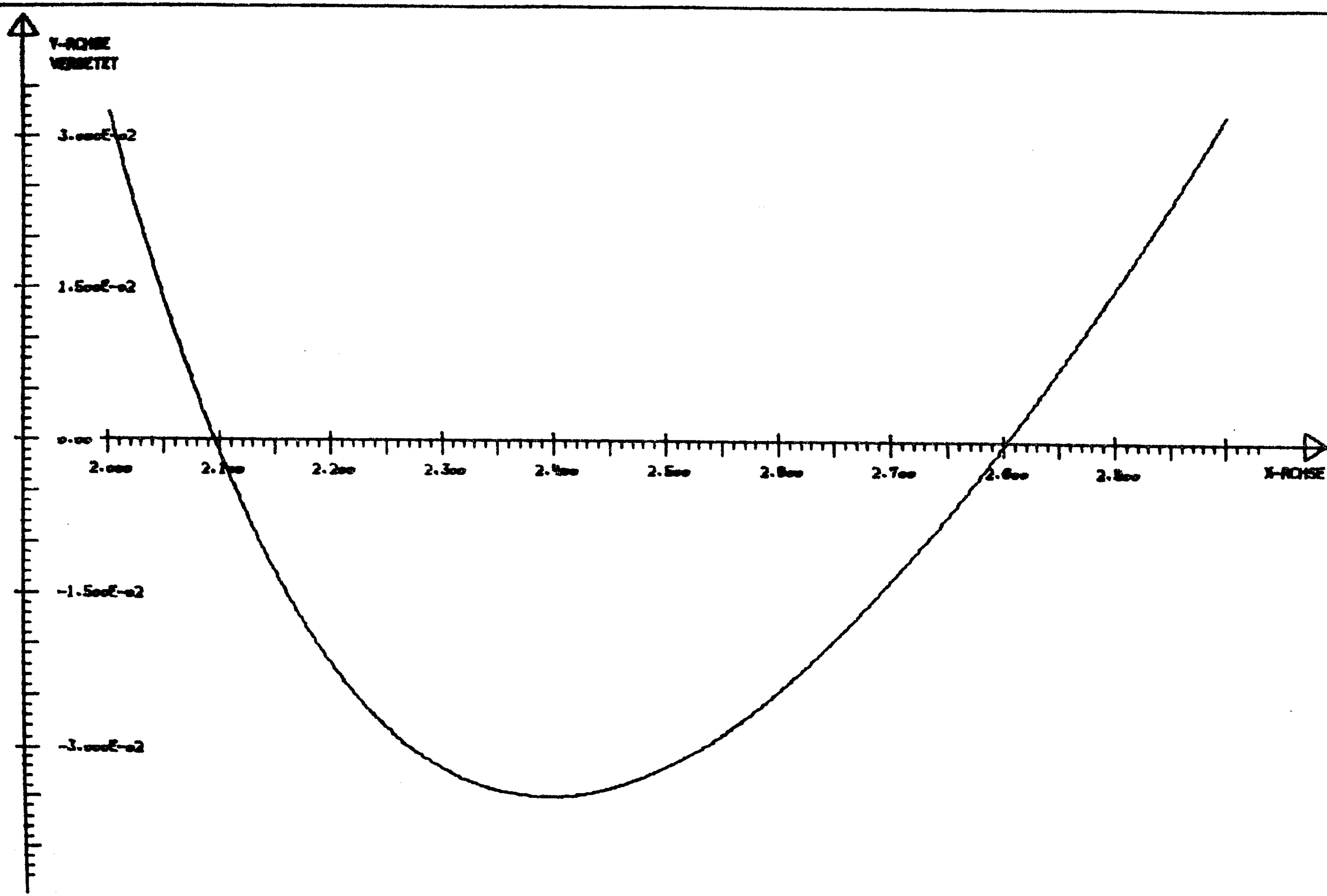
DIE NULLSTELLEN	I	LOKALE EXTREMA UND FUNKTIONSWERTE	
	I	2.000000	+0.072477395223
2.15750828	I		
	I	2.678860 (3.6D-5)	-0.072497901748
3.50979710	I		
	I	4.000000	+0.072470375892



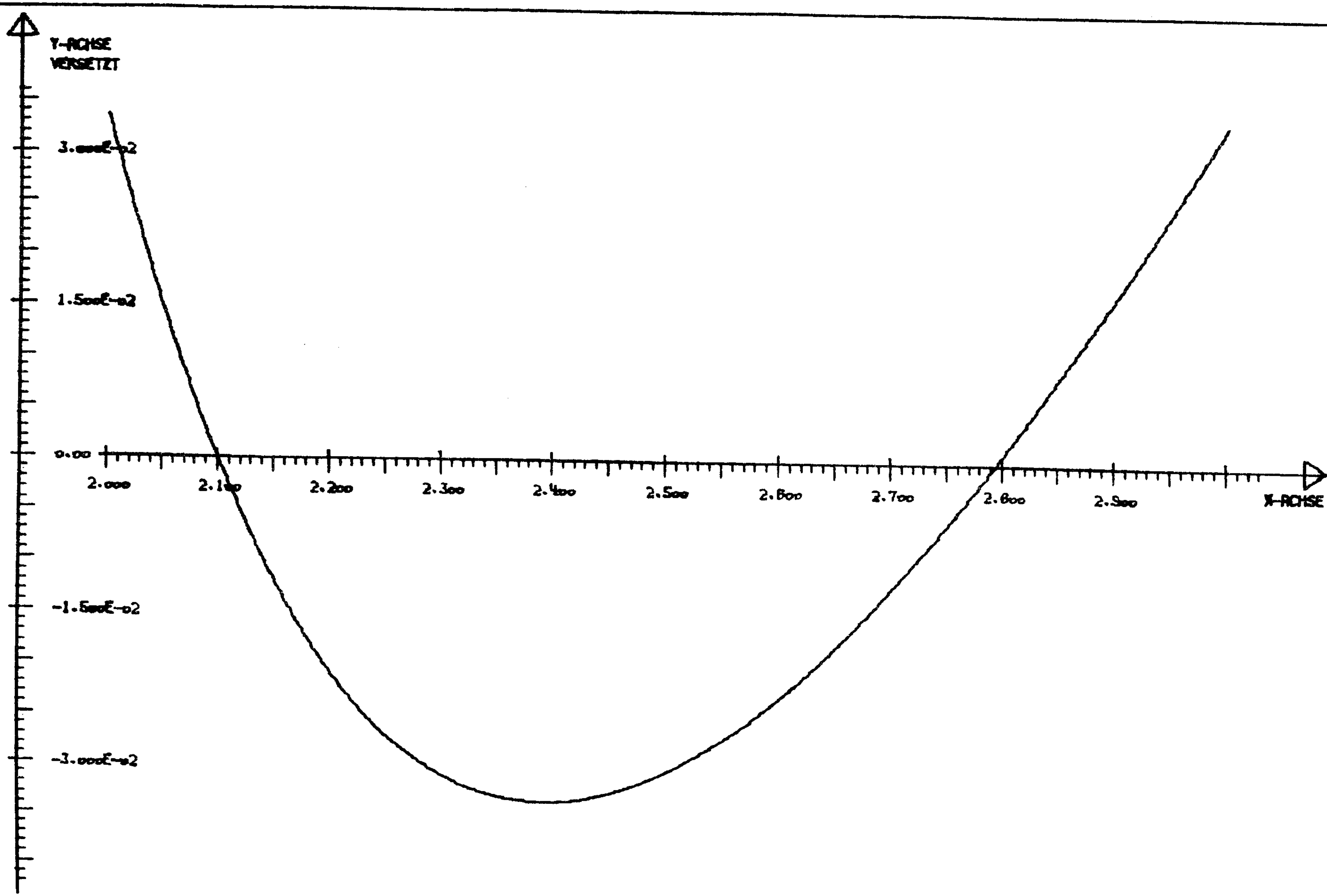
ZEICHNUNG 48



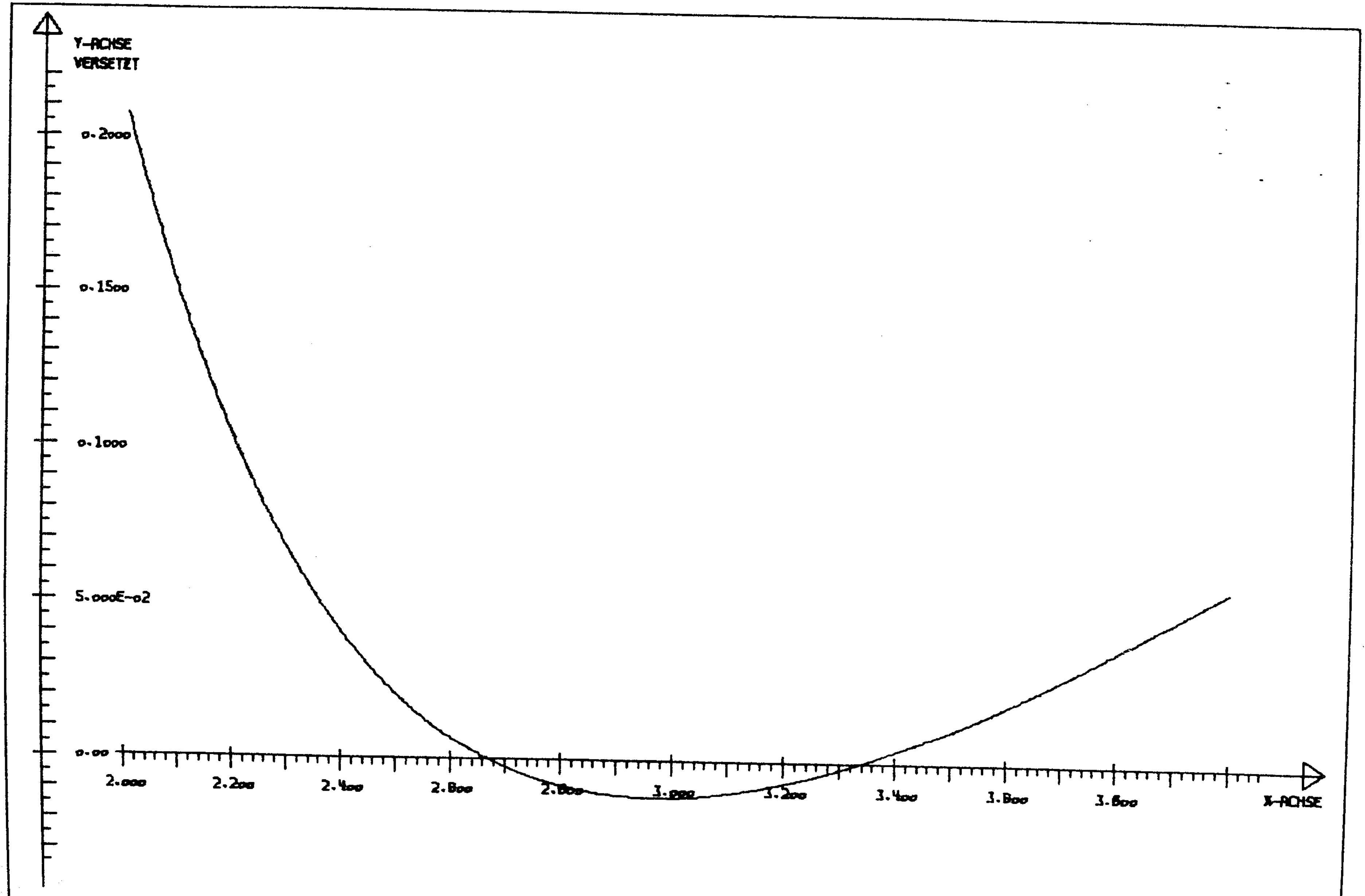
ZEICHNUNG 49



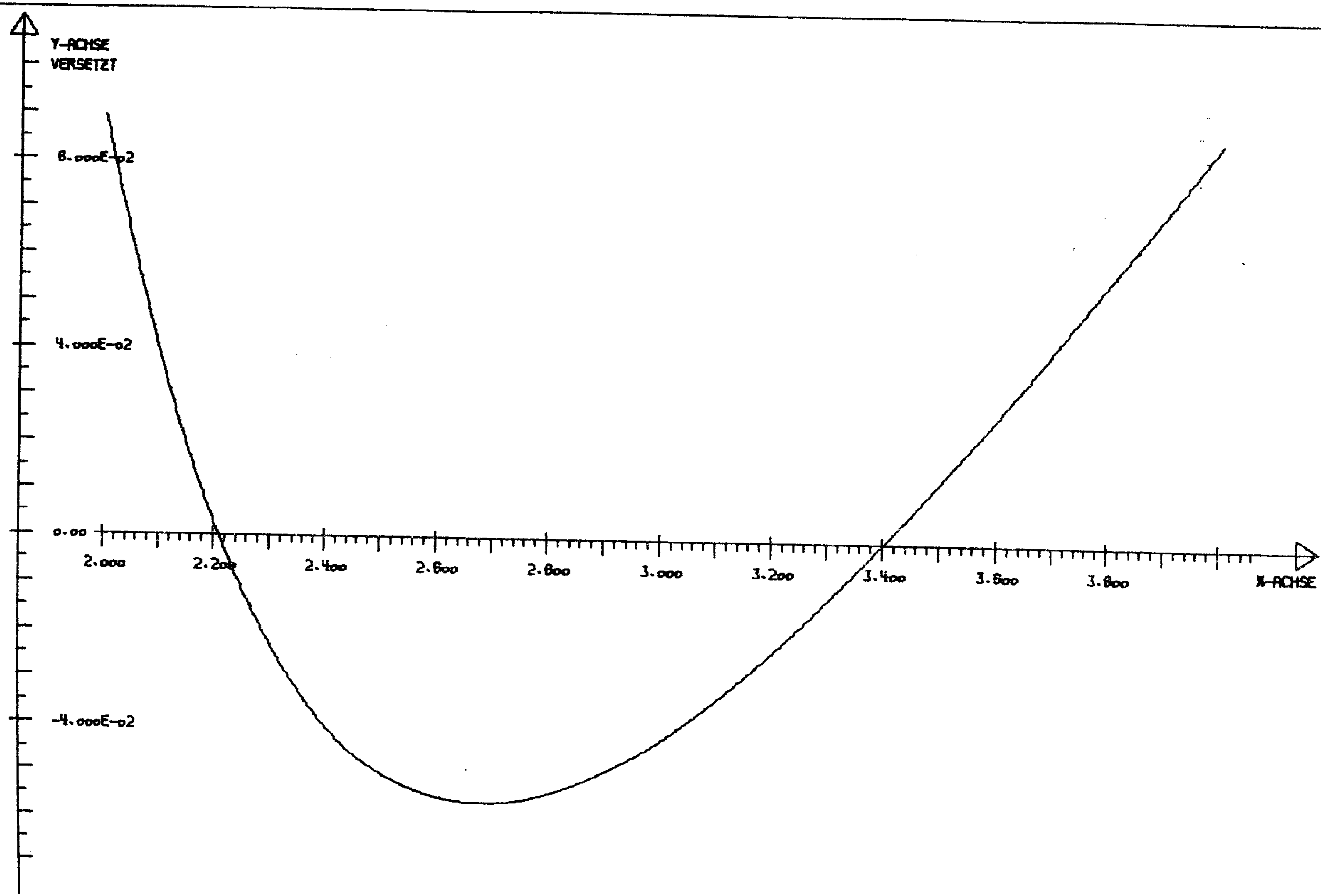
ZEICHNUNG 5o



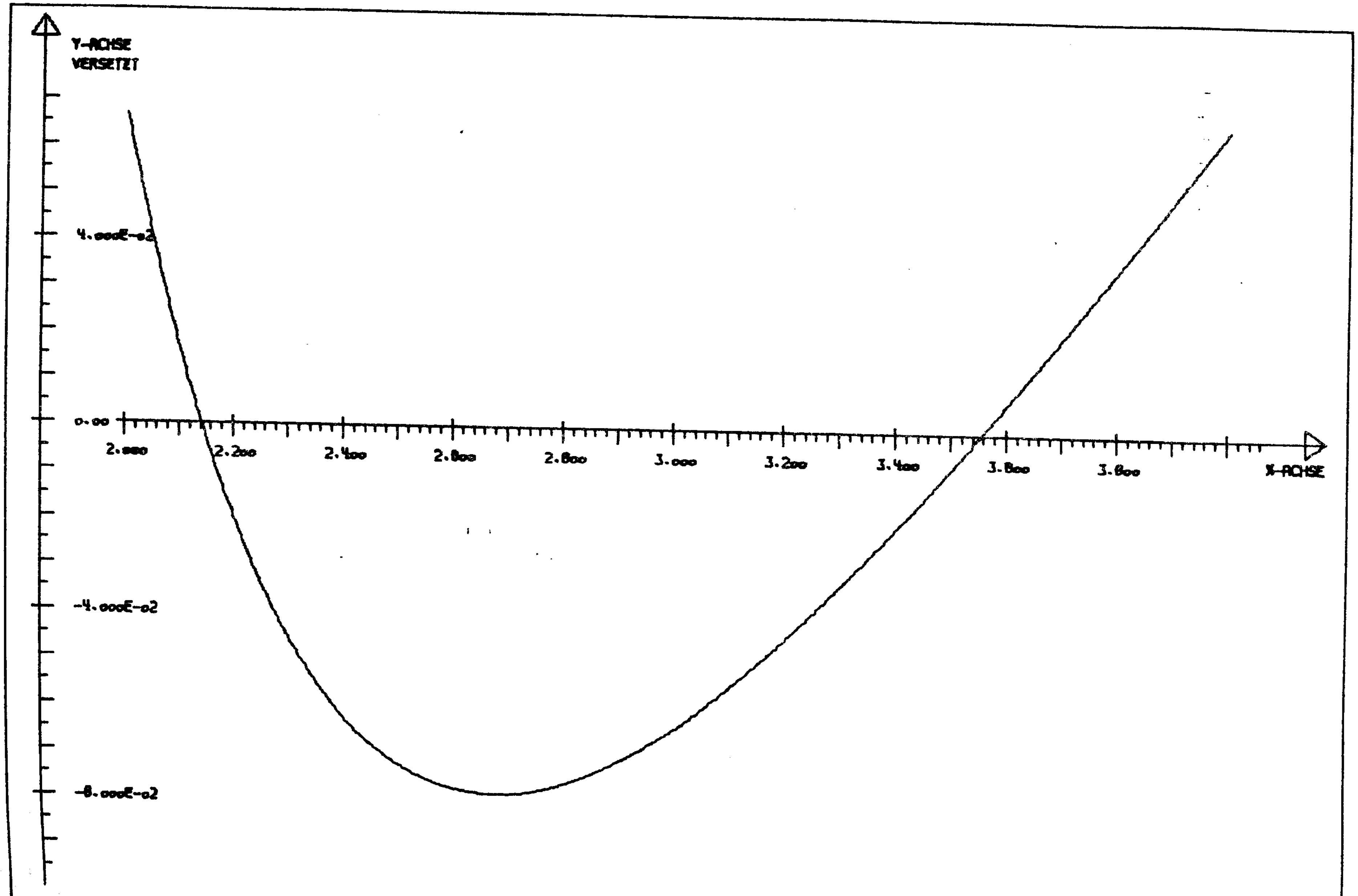
ZEICHNUNG 51



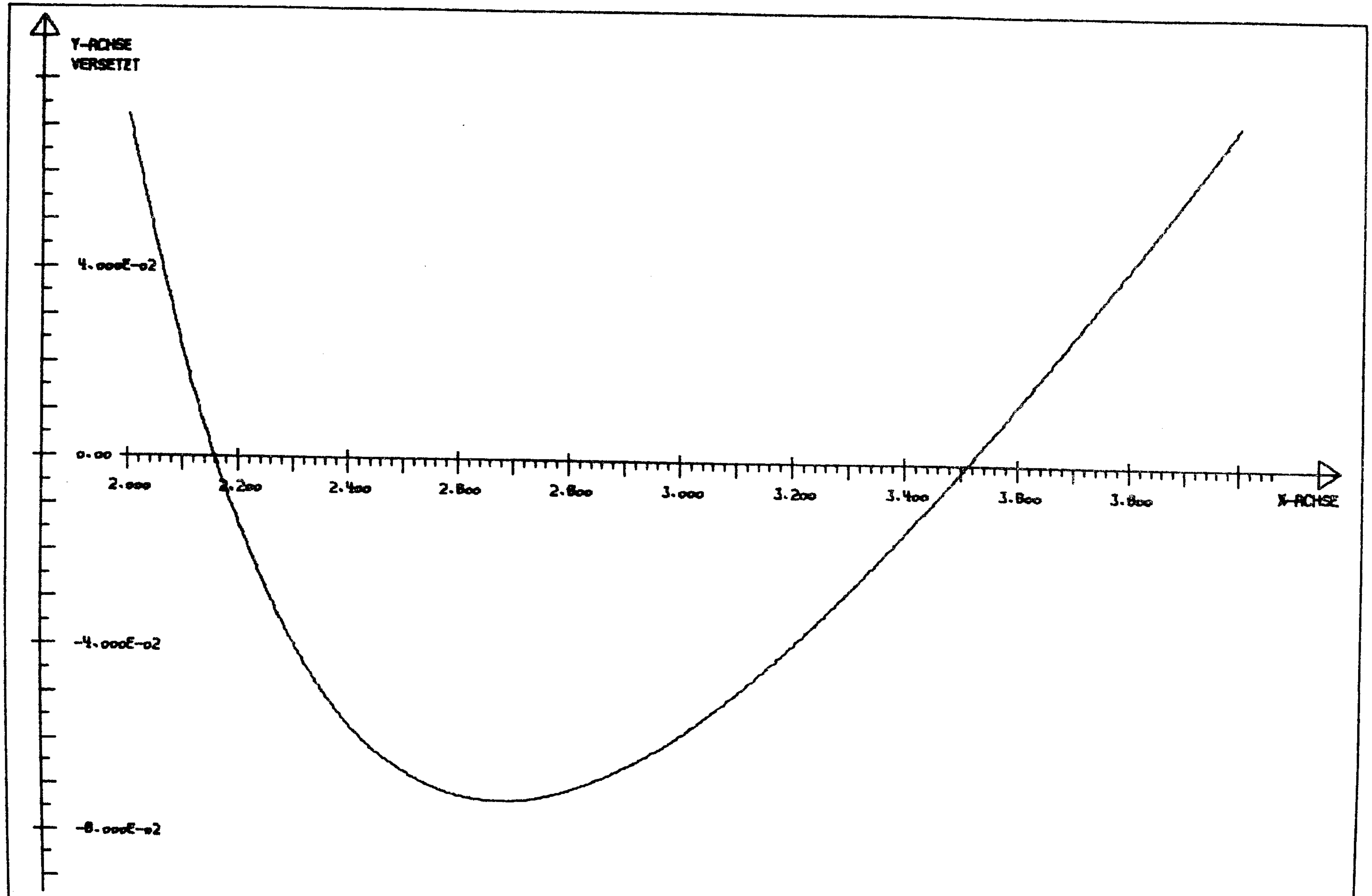
ZEICHNUNG 52



ZEICHNUNG 53



ZEICHNUNG 54



ZEICHNUNG 55