

III. NUMERISCHE EXPERIMENTE UND ERPROBUNG DER ITERATIONS-  
=====

VERFAHREN  
=====

Vorbemerkung:

Zur technischen Durchführung der folgenden Berechnungen gelten die Angaben von Abschnitt 5.4; da hier direkt Listen des Rechenzentrums verwendet werden, sind die Zahlen in Gleitkommadarstellung angegeben. Wie in 5.4 werden in den Zeichnungen die jeweiligen Fehlerfunktionen dargestellt; weiter werden die Bezeichnungen, wie sie zur Herleitung der Verfahren benutzt worden sind, beibehalten

§7 Beispiele zum Verfahren von Braess  
=====

Bemerkungen, Erläuterungen:

Es ist hier stets  $I=[0,1]$ .

Der Algorithmus von Braess wird, falls nicht anders angegeben, gemäß Fall 2 durchgeführt; die lineare Approximation nach Schritt 2 des Verfahrens wird mit dem (allgemeinen) Remez-Algorithmus ermittelt.

Um dabei nicht die Differenzierbarkeit der hier zur Demonstration benutzten Funktionen  $f$  zu verwenden, wird die Approximation auf den Punkten

$$x_i = \frac{i}{100}, \quad 0 \leq i \leq 100,$$

durchgeführt; der hierbei entstehende Diskretisierungsfehler kann vernachlässigt werden. Es wird so nach Remez iteriert, daß

$$(7.1) \quad \frac{\max_{0 \leq i \leq 100} |F(x_i) - e'(x_i)|}{\max_{0 \leq i \leq 100} |F(x_i) - e(x_i)|} \leq 1.01$$

erfüllt ist, wobei  $e$  die beste lineare Approximation an  $F$  auf  $x_i$ ,  $0 \leq i \leq 100$ , und  $e'$  eine durch die Remez-Iteration gegebene Näherung für  $e$  sei;  $F$  ist die nach Schritt 2 zu approximierende Fehlerfunktion.

Zu jedem Iterationsschritt werden zunächst die Parameter  $r_i$  der linearen Approximation 
$$\sum_{i=1}^N (r_i + r_{N+1} a_i x) e^{t_i x}$$
 angegeben,

wobei  $\sum_{i=1}^N a_i e^{t_i x}$  die entsprechende Startfunktion bzw. die im

vorhergehenden Iterationsschritt ermittelte Näherung ist.

Der nach Schritt 3 ermittelte Faktor, mit dem eine bessere Approximation berechnet wird, ist mit  $C$  bezeichnet und wird als Bruch angegeben, so daß dem Nenner leicht entnommen werden kann, wie oft zur Durchführung von Schritt 3 die Norm von Fehlerfunktionen bestimmt werden muß; dann folgen

als Resultat des Iterationsschrittes die Parameter der somit gegebenen besseren Approximation, die wieder mit  $a_i, t_i, 1 \leq i \leq N$  bezeichnet werden (Bei der Indizierung wird der Iterationsschritt nicht angegeben, da keine Verwechslungen zu befürchten sind).

An jede Iteration schließt sich eine Auswertung der Fehlerfunktion  $f-E$  auf ganz  $I$  an, wobei  $E$  die im letzten Iterationsschritt ermittelte Näherung sei;

es werden die Nullstellen und lokalen Extrema von  $f-E$  mit den dazugehörigen Funktionswerten angegeben, so daß eine Abschätzung der Minimalabweichung von  $f$  möglich ist.

In den Abschnitten 7.1, 7.2 und 7.3 wird der Algorithmus für  $f(x) = \sqrt{x}$  mit  $N=1$  und  $N=2$  durchgeführt:

In 7.1 erfolgt zunächst die Approximation bzgl.  $V_1$  nach Fall 2. Während die Iteration von 7.1A wie oben beschrieben durchgeführt ist, wird in 7.1B die Remez-Iteration bereits beendet, wenn der Quotient von (7.1) kleiner als 2 ist. Für die Rechnung bedeutet dies, daß in jedem Iterationsschritt von 7.1B nur zweimal, in den beiden ersten Schritten von 7.1A jedoch viermal und in den folgenden dreimal nach Remez iteriert wird; In 7.1B ist daher der Rechenaufwand beachtlich kleiner als in 7.1A, nach dem dritten Iterationsschritt ist aber mit den so bestimmten Parametern  $r_1$  und  $r_2$  keine Verbesserung nach Schritt 3 mehr möglich; andererseits dürfte für viele Zwecke die erreichte Genauigkeit genügen.

In 7.2 und 7.3 werden zur Approximation von  $f$  bzgl.  $V_2$  die Berechnungen des Algorithmus sowohl für Fall 2 als auch Fall 1 durchgeführt:

In 7.2 werden Startfunktionen für die Iteration in  $V_2$  angegeben, wobei aus Platzgründen die Parameter der linearen Approximation nicht aufgeführt werden.

Wie in §6 beschrieben, geht man zur Ermittlung von Startfunktionen von

$$a_1 e^{t_1 x} + a_2 e^{t_2 x}, \quad a_2 = 0, \quad t_2 \neq t_1$$

aus, wobei  $a_1, t_1$  die im fünften Iterationsschritt von 7.1A ermittelten Parameter sind.

In 7.2A sind die Ergebnisse für die Berechnung nach Fall 2 angegeben. Für die Berechnung von 7.2B nach Fall 1 ist

$$X = \{0.0, 0.3, 0.415, 0.6, 1.0\}$$

benutzt worden; man beachte hierzu Zeichnung 10.

Es sind die Startfunktionen für  $t_2 \in \mathbb{N}$  mit  $-15 \leq t_2 \leq 14$  angegeben; für  $t_2 \leq 1$  sind die Startfunktionen in  $V_2(-, +)$ , für  $t_2 \geq 2$  in  $V_2(+, -)$  enthalten, was auch aus §4 folgt. Die Norm der mit diesen Startfunktionen gegebenen Fehlerfunktionen ist auf ganz  $I$  ermittelt worden; sowohl in 7.2A wie in 7.2B erhält man bei  $t_2 = -10$  ein Minimum für die Norm der Fehlerfunktion.

In 7.3 schließlich wird die Konstruktion einer Minimallösung für  $f$  bzgl.  $V_2$  durchgeführt. Die Ergebnisse von 7.2 legen es nahe, Startfunktionen mit  $t_2 \leq 1.0$  zu verwenden; die Iteration von 7.3A bzw. 7.3B geht von der Startfunktion mit  $t_2 = -5.0$  von 7.2A bzw. 7.2B aus: In 7.3A erfolgt die Berechnung nach Fall 2; in 7.3B wird gemäß Fall 1 mit  $|X| = 5$  verfahren, so daß man die lineare Approximation nach Schritt 2 durch Lösung eines linearen Gleichungssystems erhält.

Es zeigt sich, daß bei Verwendung der Startfunktionen mit  $t_2 = -7.0, -9.0, -11.0, -13.0, -15.0$  ebenfalls fünf Iterationsschritte nötig sind, um die Genauigkeit zu erhalten, wie sie in 7.3A bzw. 7.3B erzielt worden ist; die Iterationen, die von den Startfunktionen mit  $t_2 = -9.0$  oder  $t_2 = -11.0$  ausgehen, konvergieren also nicht schneller, was man (nachträglich) wohl erwarten würde.

Verwendet man wie in 7.3C und 7.3D die Startfunktionen mit  $t_2=0.0$ , so muß der Faktor C zur Verbesserung so klein gewählt werden, daß die Folgen schlecht konvergieren; dies ist unabhängig davon, ob nach Fall 2 wie in 7.3C oder nach Fall 1 wie in 7.3D gerechnet wird. Die Iteration von 7.3C ergibt erst mit dem 25. Iterationsschritt eine Lösung mit der Genauigkeit, wie sie in 7.3A gegeben ist.

Geht man von den Startfunktionen mit  $t_2 \geq 2$  aus, so erhält man Iterationen, die äußerst langsam konvergieren. Die Startfunktion mit  $t_2=7.0$  in 7.2A ergibt (nach Fall 2) berechnet nach 180 Iterationsschritten eine Näherung mit den Parametern

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0.191\ 596 & t_1 = 2.514\ 113 \\ a_2 = -0.007\ 498 & t_2 = 5.072\ 941 \end{array} \quad (\text{Zeichnung 26})$$

In jedem Iterationsschritt ist der Faktor C kleiner als  $1/4096$ . Da man hier nur vermuten kann, daß die beiden Frequenzen bei Fortsetzung der Iteration gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren, werden die Schwierigkeiten deutlich, die die Anwendung des Algorithmus bei der Approximation ohne Vorzeichenbeschränkung mit sich bringen kann.

Die Iterationen in  $V_2$  verlaufen bereits bei Bestimmung von C nach Schritt 3 stets in nur einer Vorzeichenklasse von  $V_2$ . Diese Ergebnisse lassen es sinnvoll erscheinen, bei der Konstruktion einer Minimallösung nach Braess im allgemeinen mehrere Startfunktionen zu konstruieren und zunächst mehrere Iterationen nebeneinander durchzuführen; so kann man hoffen, eine Iteration zu erhalten, die mit vertretbarem Aufwand eine Lösung liefert. Hätte man sich bei der Approximation von f bzgl.  $V_2$  in  $V_2(-,+)$  auf die Iteration von 7.3C und in  $V_2(+,-)$  auf die oben angegebene Iteration beschränkt, so wäre trotz enormen Rechenaufwands lange ungeklärt geblieben, in welcher Vorzeichenklasse die Lösung enthalten ist.

In 7.4 wird in einem weiteren Beispiel das Konvergenzverhalten dieses Verfahrens behandelt: Hier gilt  $N=3$  und  $f(x)=(1+x)^{-1}$ . Für die Iterationen in 7.4A und 7.4B werden die Parameter der Startfunktionen mit dem Verfahren von Meinardus unter Verwendung der angegebenen Punktmengen ermittelt; es genügt die Angabe von  $x_0$  und  $x_5$ . Die Startfunktion von 7.4A sei  $E_1$ , die von 7.4B sei  $E_2$ : Es gilt also

$$4 \|f - E_2\|_I < \|f - E_1\|_I \quad (\text{Zeichnung 27,36})$$

Dennoch benötigt man von  $E_2$  ausgehend doppelt so viele Iterationsschritte, wie in 7.3A, um die gleiche Genauigkeit zu erhalten.

Neben der Konstruktion der besten linearen Approximation nach Schritt 2 erfordert die Bestimmung des Faktors C in Schritt 3 den größten Teil des Rechenaufwandes. Beachtet man dies, dann wird an diesen Beispielen die Bedeutung der Startfunktion deutlich. Es zeigt sich, daß in der Regel der Faktor C im Verlauf der Iteration wächst, falls eine Minimallösung ermittelt wird. Um den Rechenaufwand möglichst klein zu halten, wird daher zur Ermittlung des Faktors C vorgeschlagen:

Bei Beginn der Iteration verfähre man wie in 6.1 beschrieben; bei den weiteren Iterationsschritten gehe man vom Faktor C des vorhergehenden Iterationsschrittes aus und prüfe, ob man hiermit eine bessere Approximation erhält: Gilt dies, dann bestimme man durch sukzessives Verdoppeln den gesuchten Faktor, den man nach Schritt 3 von 1 ausgehend durch (häufigeres) Halbieren erhält; andernfalls hat man mit diesem Faktor nach Schritt 3 zu verfahren.

Die Iterationen werden dann abgebrochen, wenn die Parameter  $r_i$  der linearen Approximation einen kleineren Betrag als  $5 \cdot 10^{-10}$  haben; quadratische Konvergenz ist dabei nur bei den letzten Iterationsschritten zu beobachten.

Diese Beispiele zeigen weiter, daß die Konvergenzgeschwindigkeit der ermittelten Folgen im allgemeinen unabhängig davon ist, ob nach Fall 1 oder Fall 2 verfahren wird.