§3 Eindeutigkeitssätze und Charakterisierung der Minimallösungen

Nach dem Existenzproblem sollen nun folgende Fragen behandelt werden:

1. Sind die Minimallösungen bzgl. V_N, V_N^o, V_N^+ eindeutig bestimmt?
2. Wodurch sind die Minimallösungen gekennzeichnet?
3. Unter welchen Voraussetzungen ist eine Minimallösung bzgl. V_N^+ oder V_N^o auch Minimallösung bzgl. V_N?

Da die Existenz einer Minimallösung vorausgesetzt wird, können die entsprechenden Sätze, allgemeiner als in [1], für die Approximation über kompakten, reellen Teilmengen angegeben werden.
Um, wie in §1 angekündigt, die Ergebnisse von [11] anwenden zu können, werden folgende Begriffe benötigt:

Definition 3.1

Mit $n \in \mathbb{N}$ sei A eine offene Teilmenge des n-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$ und V sei eine Menge von Funktionen $v(a)=v(a,x)$ aus C(I) auf dem reellen Intervall I, die von $a \in A$ abhängen; ferner existiere für jedes $a=(a_1,\dots,a_n) \in A$ und $x \in I$ die partielle Ableitung $D_i v(a,x) = \frac{\partial v(a,x)}{\partial a_i}$, $1 \leq i \leq n$; diese Ableitungen werden als Funktionen auf I mit $D_i v(a)$, $a \in A$, bezeichnet und es sei $D_i v(a) \in C(I)$ für $a \in A$ und $1 \leq i \leq n$ erfüllt.

a. Der Gradient von $v(a) \in V$ ist gegeben durch

$$\operatorname{grad}(v(a)) = (D_1 v(a),\dots,D_n v(a)) .$$

Mit $r=(r_1,\dots,r_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $(r,\operatorname{grad}(v(a))) \in C(I)$ die Funktion

$$(r,\operatorname{grad}(v(a))) = \sum_{i=1}^{n} r_i D_i v(a)$$

Für $x \in I$ gilt also $\operatorname{grad}(v(a,x)) = (D_1 v(a,x),\dots,D_n v(a,x))$

und $$(r,\operatorname{grad}(v(a,x))) = \sum_{i=1}^{n} r_i D_i v(a,x) \quad .$$

b. Der Gradientenraum $W(a)$ von $v(a)\in V$ ist der von den Funktionen $D_i v(a)$, $1\leq i\leq n$, erzeugte lineare Raum:

$$W(a)=\{(r,\mathrm{grad}(v(a)))\,|\,r\in\mathbb{R}^n\}.$$

c. V erfüllt die lokale Haarsche Bedingung, wenn für alle $a\in A$ der lineare Raum $W(a)$ der Haarschen Bedingung genügt: Für $a\in A$ besitzt jedes Element von $W(a)$ in I höchstens $m-1$ Nullstellen, wenn m die Dimension von $W(a)$ ist, oder verschwindet auf I identisch.

<u>Bemerkung 3.1</u>

a. Für die Bildung des Gradienten nach Definition 3.1a ist es also notwendig, daß für die Elemente des betrachteten Funktionensystems eine Parametrisierung wie oben gegeben ist; wie in Satz 3.1 erfordert dies für $V=V_N$ eine Beschränkung auf geeignete Teilmengen.

b. Es sei V das Funktionensystem von Definition 3.1; ist weiterhin die Abbildung $a \longrightarrow D_i v(a)\in C(I)$, $1\leq i\leq n$, stetig für alle $a\in A$, gibt es also für jedes $\varepsilon>0$ und $a\in A$ ein $\delta=\delta(a,\varepsilon)>0$, so daß $||D_i v(a)-D_i v(b)||_I<\varepsilon$ für $b\in A$ mit $||a-b||<\delta$ erfüllt ist, dann besitzt $v(a)$ für jedes $a\in A$ eine Frêchet-Ableitung (nach dem Parameter a); dabei ist $||b||$ die Euklidische Norm von $b\in\mathbb{R}^n$:
Wie in der Analysis gezeigt wird (z.B. bei H. Bauer, Differential- und Integralrechnung II, S. 97), folgt aus diesen Voraussetzungen für $a,b\in\mathbb{R}^n$, $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)$:

$$\frac{||v(a+b)-v(a)-(b,\mathrm{grad}(v(a)))||_I}{||b||}\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}||D_i v(c_i(b))-D_i v(a)||_I \quad \text{für } ||b|| \text{ hinreichend klein;}$$

dabei ist $c_i(b)=(a_1+b_1,\dots,a_{i-1}+b_{i-1},c_i,a_{i+1},\dots,a_n)$ mit $c_i\in(a_i,a_i+b_i)$, $1\leq i\leq n$. Aus der Stetigkeit in den Parametervektoren folgt

$$\lim_{||b||\to 0}\frac{||v(a+b)-v(a)-(b,\mathrm{grad}(v(a)))||_I}{||b||}=0$$

Die Abbildung $b \longrightarrow (b,\text{grad}(v(a))) \in C(I)$ für $b \in \mathbb{R}^n$ ist linear und beschränkt und stellt somit die (eindeutig bestimmte) Fréchet-Ableitung von $v(a)$ nach dem Parametervektor a dar.

Definition 3.2

Gegeben sei $F \in C(X)$, $X \subseteq \mathbb{R}$.

a. $x \in X$ ist ein Extremalpunkt von F in X, falls gilt:

$$|F(x)| = ||F||_X .$$

b. F besitzt in X eine Alternante der Länge n mit $n \in \mathbb{N}$, falls F n Extremalpunkte x_i, $1 \leqq i \leqq n$, in X besitzt und mit $n>1$ gilt:

$$x_i < x_{i+1} \text{ und } \text{sign}(F(x_i)) = -\text{sign}(F(x_{i+1})) \qquad 1 \leqq i \leqq n-1$$

Die Punkte x_i, $1 \leqq i \leqq n$, werden als Alternantenpunkte von F bezeichnet.

c. F besitzt in X eine positive (negative) Alternante der Länge n, wenn F in X eine Alternante der Länge n besitzt, so daß im Alternantenpunkt x_n gilt:

$$F(x_n) > o \qquad (F(x_n) \leqq o)$$

Vereinbarung:

Ab jetzt sei $N \in \mathbb{N}$ und X stets eine kompakte, reelle Teilmenge mit der Mächtigkeit $|X| > 2N$; I sei das Intervall $[p,q]$ mit $p = \min X$ und $q = \max X$. Weiter sei $f \in C(I)$.

Zunächst werden die Sätze 11 und 12 aus [11] für kompakte Mengen formuliert:

Hilfssatz 3.1 ([11], Satz 11)

Es sei $V \subseteq C(I)$; für $v \in V$ gebe es ein $N(v) \in \mathbb{N}$, so daß $u-v$ für jedes $u \in V$ höchstens $N(v)-1$ Nullstellen in I besitzt oder auf I identisch verschwindet. In X gebe es $N(v)+1$ Punkte x_i mit $1 \leqq i \leqq N(v)+1$ und $x_1 < x_2 < \ldots < x_{N(v)+1}$, so daß

$$\text{sign}(f(x_i) - v(x_i)) = -\text{sign}(f(x_{i+1}) - v(x_{i+1})) \neq o$$

für $1 \leqq i \leqq N(v)$ erfüllt ist; $D := \{x_i \mid 1 \leqq i \leqq N(v)+1\}$

Behauptung: $\displaystyle \inf_{u \in V} ||f-u||_X \geq \min_{x \in D} |f(x) - v(x)|$

Beweis:

Mit $S(u_1,u_2,x):=(f(x)-u_1(x))(u_2(x)-u_1(x))$ für $u_1,u_2\in V$ gibt es für alle $u\in V$ mindestens ein $x_u\in D$, so daß $S(v,u,x_u)\leqq o$ erfüllt ist; denn gilt für ein $u\in V$ und alle $x\in D$

$$\operatorname{sign}(f(x)-v(x))=\operatorname{sign}(u(x)-v(x))\neq o,$$

dann folgt im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $u-v$ in $J:=(x_1,x_{N(v)+1})$ mindestens $N(v)$ Nullstellen besitzt, aber auf I nicht identisch verschwindet.

Es ist also $\min\limits_{x\in D} S(v,u,x) \leqq o$ für alle $u\in V$ erfüllt und Satz 1 in [11] ergibt die Behauptung.

Bemerkung: Für den Beweis von Hilfssatz 3.1 wird eine Parametrisierung von V, wie sie in Definition 3.1 angenommen war, nicht benötigt; deshalb ist dieser Hilfssatz auf V_N mit $N(v)\leqq 2N$ für $v\in V_N$ anzuwenden und ergibt eine untere Schranke für die Minimalabweichung von f bzgl. V_N.

Bemerkung 3.2

Zum Beweis von Hilfssatz 3.2 wird benötigt:

Der lineare Raum $U\subseteq C(I)$ mit der Dimension $n+1$ erfülle die Haarsche Bedingung. Es gilt:

1. Jedes Element $u\in U$, das auf I nicht identisch verschwindet, besitzt in I höchstens n Nullstellen, wobei die Nullstellen im Innern von I, an denen u das Vorzeichen nicht wechselt, doppelt gezählt werden. ([8], Theorem 4.2)
2. Es sei $T=\{t_i \mid 1\leqq i\leqq k\}\subseteq I$, $k\in\mathbb{N}$, eine Menge paarweise verschiedener Punkte von $I=[p,q]$ mit $\sum\limits_{i=1}^{k} w(t_i)\leqq n$, wobei gelte:
$$w(t)=\begin{cases}1 : t\in\{p,q\}\\ 2 : t\in(p,q)\end{cases}$$
Dann gibt es ein nichtnegatives Element $u^+\in U$, das auf I nicht identisch verschwindet, so daß u^+ genau die k Nullstellen t_i, $1\leqq i\leqq k$, besitzt; die einzige Ausnahme besteht darin, daß, falls genau ein Element von $\{p,q\}$ in T enthalten und n gerade ist, u^+ auch im anderen Randpunkt von I verschwinden kann. ([8], Theorem 5.1)
3. Mit diesen beiden Sätzen folgt die Existenz eines Elementes $v\in U$ mit $v(x)>o$ für $x\in I$.

Hilfssatz 3.2 ([11], Satz 12)

Es seien V und A gegeben wie in Definition 3.1 und Bemerkung 3.1b. V erfülle die lokale Haarsche Bedingung und $v(a) \in V$ sei eine Minimallösung für f auf X bzgl. V; es sei hier $|X|>n$.
Dann gibt es in X für $f-v(a)$ eine Alternante der Länge $d+1$, wobei der Gradientenraum W von $v(a)$ die Dimension d besitzt.
Beweis:
Nach Voraussetzung ist $v(b) \in V$ Fréchet-differenzierbar in $b \in A$.
Es sei o.B.d.A. $\|f-v(a)\|_X \neq 0$.
Für $d=0$ ist nichts zu zeigen; es sei also $d \geq 1$.
Nach Satz 9 in [11] besitzt $F:=f-v(a)$ in X mindestens $d+1$ Extremalpunkte; D sei die Menge der Extremalpunkte von F in X.

Nimmt man an, daß $F(x)=\|F\|_X$ ($F(x)=-\|F\|_X$) für alle $x \in D$ erfüllt ist, dann gilt mit der besten Approximation w an F bzgl. W auf D (W erfüllt die Haarsche Bedingung nach Voraussetzung): $\|F\|_X = \|F\|_D > \|F-w\|_D$
Hieraus folgt $w(x)>0$ ($w(x)<0$) für $x \in D$ und damit:

$$\operatorname{sign}(w(x)) = \operatorname{sign}(F(x)) \neq 0 \qquad x \in D$$

Dies steht im Widerspruch zur Minimalität von $v(a)$ nach Satz 8 in [11]. Dieser Widerspruch ergibt sich auch aus der Existenz eines Elementes $u \in W$ mit $u(x)>0$ ($u(x)<0$) für $x \in I$ nach Bemerkung 3.2 . Es folgt also, daß es in D mindestens zwei Punkte x_1, x_2 gibt mit $x_1<x_2$ und $\operatorname{sign}(F(x_1))=-\operatorname{sign}(F(x_2))\neq 0$.
Die Behauptung ist damit für $d=1$ gezeigt; es sei nun $d \geq 2$:

D ist abgeschlossen und es sei $J=[d_1,d_2]$ mit $d_1=\min D$ und $d_2=\max D$.
Annahme: Es gibt keine Alternante der Länge $d+1$ für F in X.
F ist stetig in I und man kann daher J in $m+1 \geq 2$ Teilintervalle $[y_i,y_{i+1}]$, $0 \leq i \leq m$, mit $m<d$ so aufteilen, daß gilt:
1. Auf $D \cap [y_i,y_{i+1}]$ besitzt F gleiches Vorzeichen für $0 \leq i \leq m$.
2. Für $x \in D \cap [y_{i-1},y_i]$ und $y \in D \cap [y_i,y_{i+1}]$ gilt für $1 \leq i \leq m$:

$$\operatorname{sign}(F(y)) = -\operatorname{sign}(F(x)) .$$

3. $F(y_i)\neq 0$ und $y_i \notin D$ für $1 \leq i \leq m$.

In $[y_{m-1}, d_2]$ besitzt F mindestens eine Nullstelle z: F(z)=o.

1.Fall: $m=d-2r-1$, $r \in \mathbb{N} \cup \{o\}$.

In J wähle man 2r Punkte p_i, $1 \leq i \leq 2r$, mit $z < p_1 < p_2 < \ldots < p_{2r}$ und

$$p_{2r} - z < \min\{|z-x| \mid x \in D \cup \{y_m\}\} .$$

Da W mit der Dimension d die Haarsche Bedingung erfüllt, folgt zunächst, daß es ein $b \in \mathbb{R}^d$ gibt mit

(3.1) $\quad (b, \mathrm{grad}(v(a,d_1))) = \mathrm{sign}(F(d_1))$

(3.2) $\quad (b, \mathrm{grad}(v(a,y_i))) = o \qquad 1 \leq i \leq m$

$\quad\quad\quad (b, \mathrm{grad}(v(a,p_i))) = o \qquad 1 \leq i \leq 2r$

Nach Bemerkung 3.2 besitzt $(b, \mathrm{grad}(v(a)))$ in I genau die durch (3.2) gegebenen d-1 Nullstellen und wechselt in diesen das Vorzeichen, weshalb mit (3.1) folgt:

(3.3) $\quad \mathrm{sign}(b, \mathrm{grad}(v(a,x))) = \mathrm{sign}(F(x)) \quad x \in D$

2.Fall: $m=d-2r-2$, $r \in \mathbb{N} \cup \{o\}$.

Wie oben gibt es ein $b \in \mathbb{R}^d$, so daß mit den Punkten p_i von oben gilt:

(3.4) $\quad (b, \mathrm{grad}(v(a,d_1))) = \mathrm{sign}(F(d_1))$

(3.5) $\quad (b, \mathrm{grad}(v(a,y_i))) = o \qquad 1 \leq i \leq m$

$\quad\quad\quad (b, \mathrm{grad}(v(a,p_i))) = o \qquad 1 \leq i \leq 2r$

(3.6) $\quad (b, \mathrm{grad}(v(a,d_2))) = \mathrm{sign}(F(d_2))$

Nach Bemerkung 3.2 besitzt $(b, \mathrm{grad}(v(a)))$ wegen (3.4) und und (3.6) in J genau die durch (3.5) gegebenen d-2 Nullstellen und wechselt dort sein Vorzeichen. Damit gilt auch hier (3.3) .

In beiden Fällen liegt also ein Widerspruch zur Minimalität wie oben vor und die Behauptung ist bewiesen.

Wir sind nun in der Lage, eine Charakterisierung für Minimallösungen bzgl. V_N anzugeben.

<u>Satz 3.1</u> (Braess, [1])

Es sei $E(x)=\sum_{i=1}^{L} P_i(x)e^{t_i x} \in V_N$ mit grd(E)=K und der Länge L gegeben.

Behauptung:

a. Besitzt f-E in X eine Alternante der Länge N+K+1, dann ist E die eindeutig bestimmte Minimallösung für f bzgl. V_N auf X.

b. Ist E Minimallösung für f bzgl. V_N auf X, dann gibt es für f-E eine Alternante der Länge N+L+1 in X.

Beweis:

Für jedes $h \in V_N$ gilt $grd(h-E) \leqq N+K$ und $h-E \neq o$ besitzt nach Satz 1.1 höchstens N+K-1 reelle Nullstellen. Hat also f-E in X eine Alternante der Länge N+K+1, dann folgt mit Hilfssatz 3.1: $\inf_{h \in V_N} ||f-h||_X \geqq ||f-E||_X$; E ist also eine Minimallösung für f auf X bzgl. V_N.

Annahme: $E_1 \in V_N$ mit $E_1 \neq E$ ist eine weitere Minimallösung:

$$(3.7) \qquad ||f-E_1||_X = ||f-E||_X \; .$$

Der Vorzeichenvektor S von E_1-E hat maximal N+K Komponenten und damit höchstens N+K-1 Vorzeichenwechsel. Andererseits hat $(f-E)-(f-E_1)=E_1-E \neq o$ in $[x_1, x_{N+K+1}]$ wegen (3.7) mindestens N+K Nullstellen, wobei x_1 bzw. x_{N+K+1} der kleinste bzw. größte Alternantenpunkt einer Alternante von f-E in X ist. Nach Satz 1.3 stellt dies einen Widerspruch dar; damit ist die erste Behauptung gezeigt.

Es gilt $E(x)=\sum_{i=1}^{L} P_i(x)e^{t_i x} + \sum_{i=K+1}^{N} a_i e^{t_i x}$ mit $a_i=o$, $K+1 \leqq i \leqq N$, und $t_i<t_{i+1}$, $K+1 \leqq i<N$, $t_i \in \mathbb{R}$ für $K+1 \leqq i \leqq N$.

Ist E Minimallösung für f bzgl. V_N auf X, dann ist E auch Minimallösung für f bzgl. der Menge

$$V=\{E(b) \in V_N \,|\, E(b,x)=\sum_{i=1}^{L} Q_i(x)e^{s_i x} + \sum_{i=K+1}^{N} b_i e^{s_i x},\ Q_i \text{ ist reelles Polynom mit } grd(Q_i) \leqq m_i,\ s_i \in \mathbb{R},\ 1 \leqq i \leqq L,$$
$$s_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ für } K+1 \leqq i \leqq N \text{ und } s_i<s_j \text{ für } i<j\},$$

wobei $m_i=grd(P_i)$ für $1 \leqq i \leqq L$ ist.

Jedem Element $E(b) \in V$ ist ein Parametervektor $b \in \mathbb{R}^{2N-K+L}$ zugeordnet:

$$b=(b_{1,o},\dots,b_{1,m_1},b_{2,o},\dots \quad \dots,b_{L,o},\dots,b_{L,m_L},b_{K+1},\dots,b_N, s_1,\dots,s_L,s_{K+1},\dots,s_N) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \qquad E(b,x)=\sum_{i=1}^{L}\Big(\sum_{j=o}^{m_i} b_{i,j}x^j\Big)e^{s_i x} + \sum_{i=K+1}^{N} b_i e^{s_i x} \in V$$

Damit genügt V den Voraussetzungen von Hilfssatz 3.2. Der Gradientenraum von E als Element von V hat die Dimension N+L und es gibt daher **für** f-E in X eine Alternante der Länge N+L+1; dies ist die zweite Behauptung des Satzes.

Bemerkung:

In V_N stimmen also im allgemeinen die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Minimallösung nicht überein; da für $E \in V_N^o$ die Länge mit dem Grad zusammenfällt, ist in diesem Fall die Existenz einer Alternante der Länge N+K+1= =N+L+1 von f-E in X notwendig und hinreichend dafür, daß E Minimallösung für f auf X bzgl. V_N ist.

Zum folgenden Korollar vergleiche man Satz 16 in [11].

<u>Korollar 3.1</u>

Es sei $E(a,x) = \sum_{i=1}^{L} a_i e^{t_i x} \in V_N^o$ mit der Länge L gegeben.

Behauptung:

a. Ist E(a) auf X Minimallösung für f bzgl. V_N^o, dann ist E(a) die eindeutig bestimmte Minimallösung für f bzgl. V_N und V_N^o.

b. E(a) ist genau dann beste Approximation auf X an f bzgl. V_N^o, wenn f-E(a) in X eine Alternante der Länge N+L+1 besitzt.

Beweis:

V_N^o erfüllt die Voraussetzungen von Hilfssatz 3.2 und der Gradientenraum von E(a) besitzt die Dimension N+L.

Ist daher E(a) eine Minimallösung für f auf X bzgl. V_N^o , dann besitzt f-E(a) in X eine Alternante der Länge N+L+1 und Satz 3.1a ergibt den ersten Teil der Behauptung;

liegt umgekehrt eine solche Alternante vor, so ist E(a) Minimallösung bzgl. V_N, also insbesondere auch bzgl. V_N^o. Damit ist auch die zweite Behauptung gezeigt.

Satz 3.2 (Braess, [1])

$E(a) \in V_N^+$ $(E(a) \in V_N^-)$ mit der Länge L sei eine beste Approximation an f auf X bzgl. V_N^+ (V_N^-).

Behauptung:

a. E(a) ist auch die beste Approximation an f bzgl. V_L^o und V_L auf X .

b. E(a) ist die eindeutig bestimmte Minimallösung für f bzgl. V_N^+ (V_N^-) auf X .

Beweis:

Zu a.: Für L=o ist nichts zu zeigen; es sei also $L \geqq 1$. Nach Voraussetzung ist E(a) eine beste Approximation an f bzgl. $V := V_L^+ - V_{L-1}$ $(V := V_L^- - V_{L-1})$. V erfüllt die Voraussetzungen von Hilfssatz 3.2 und der Gradientenraum von E(a) als Element von V hat die Dimension 2L. Daher besitzt f-E(a) eine Alternante der Länge 2L+1 in X. Aus Korollar 3.1 folgt hiermit der erste Teil der Behauptung.

Zu b.: E(a) ist also insbesondere die eindeutig bestimmte Minimallösung bzgl. V_L^+ (V_L^-): $E(b) \in V_N^+$ $(E(b) \in V_N^-)$ mit der Länge L_1 sei eine weitere Minimallösung:

$$||f-E(b)||_X = ||f-E(a)||_X \tag{3.8}$$

Damit ist E(b) auch Minimallösung für f bzgl. $V_{L_1}^o$. Aus der Eindeutigkeitsaussage von Korollar 3.1 folgt wegen (3.8)

$$L=L_1,\ E(a)=E(b) .$$

Damit ist auch der zweite Teil der Behauptung gezeigt.

Bemerkung:

1. Satz 3.2 besagt für die Approximation durch Exponentialsummen, daß ein Algorithmus, der eine beste Approximation an f bzgl. V_N ermittelt, zugleich für die Approximation bzgl. V_N^+ und V_N^o zu verwenden ist. Hat man umgekehrt ein Verfahren zur Berechnung der besten Approximation bzgl. V_N^+, so erhält man damit auch die beste Approximation bzgl. V_L, wobei L nach Satz 3.2 bestimmt ist.

2. Im Beweis von Satz 3.2 wird $V_L^+ - V_{L-1}$ betrachtet, da die für V_L^+ definierte Parametermenge in $\mathbb{R}^{2L}$ nicht offen ist; Hilfssatz 3.2 ist damit nicht auf V_L^+ anzuwenden. Diese Tatsache wirkt sich auch bei der Charakterisierung der Minimallösung bzgl. V_N^+ in Satz 3.4 aus.

Nach Korollar 3.1 und Satz 3.2 sind also die Minimallösungen für f bzgl. V_N^o und V_N^+ , V_N^- eindeutig bestimmt; es soll nun gezeigt werden, daß dies in V_N allgemein nicht gilt.

Hilfssatz 3.3

Es sei $J=[-y,y]$ und $V \subseteq C(J)$; ferner sei $v \in V$ die eindeutig bestimmte beste Approximation an $f \in C(J)$ bzgl. V auf J und es sei die Funktion w mit $w(x)=v(-x)$ für $x \in J$ in V enthalten. Für f gelte $f(x)=f(-x)$, $x \in J$.

Behauptung: Für $x \in J$ gilt $v(x)=v(-x)$

Beweis:

Mit $x \in J \Longrightarrow -x \in J$ erhält man:

$$||f-v||_J = \max_{x \in J}|f(x)-v(x)| = \max_{x \in J}|f(-x)-v(-x)| = \max_{x \in J}|f(x)-w(x)| =$$
$$= ||f-w||_J$$

Aus der Eindeutigkeit der Minimallösung folgt

$$v(x)=w(x)=v(-x), \quad x \in J,$$

und damit die Behauptung.

Satz 3.3 (Braess, [1])

Es sei $J=[-1,1]$; ist $f \in C(J)$ streng monoton fallend auf $[o,1]$ und gilt $f(x)=f(-x)>o$ für $x \in J$, dann gibt es für f auf J mindestens zwei Minimallösungen bzgl. V_2.

Beweis:

Die Existenz einer besten Approximation $E \in V_2$ für f auf J folgt aus Satz 2.6 .

Annahme: E ist die eindeutig bestimmte Minimallösung für f bzgl. V_2 auf J.

Nach Hilfssatz 3.3 folgt

(3.9) $$E(x) = E(-x),\ x \in J.$$

Es gilt $E \neq o$ nach Satz 3.1 und Voraussetzung.

1.Fall: $E(x)=(a+bx)e^{tx}$

Nach (3.9) gilt also $(a+bx)e^{tx}-(a-bx)e^{-tx}=o$ für $x \in J$.

Mit Satz 1.1 erhält man daraus $E(x)=a \in \mathbb{R}$.

2.Fall: $E(x)=a_1 e^{t_1 x}+a_2 e^{t_2 x}$

Aus (3.9) folgt für alle $x \in J$

$$a_1(e^{t_1 x}-e^{-t_1 x})+a_2(e^{t_2 x}-e^{-t_2 x})=o$$

Beachtet man weiter $E \neq o$ und $t_2 \neq t_1$, so ergibt sich $a_1=a_2=a$ und $-t_2=t=t_1$ und damit

$$E(x)=a(e^{tx}+e^{-tx}) \text{ oder } E(x)=a \in \mathbb{R}.$$

Aus (3.9) folgt also $E(x)=a(e^{tx}+e^{-tx})$ $a,t \in \mathbb{R}$ (mit $t=o$ erhält man die konstante Funktion).

Wegen der Monotonie von f besitzt f-E in jedem Fall höchstens zwei Nullstellen in J. Dies steht im Widerspruch zur Aussage von Satz 3.1 , wonach f-E in J eine Alternante hat, deren Länge mindestens 4 ist. Damit ist die Annahme widerlegt.

Zur Charakterisierung der Minimallösung bzgl. V_N^+ beachte man die Bemerkung von oben.

<u>Satz 3.4</u> (Braess, [1])

Gegeben sei $E(a,x)=\sum_{i=1}^{L} a_i e^{t_i x} \in V_N^+$ mit der Länge L.

Behauptung:

Für L=N ist E(a) genau dann Minimallösung für f bzgl. V_N^+ auf X, wenn f-E(a) in X eine Alternante der Länge 2N+1 besitzt.

Gilt L<N, so ist E(a) genau dann Minimallösung für f bzgl. V_N^+, auf X, wenn f-E(a) in X eine negative Alternante der Länge 2L+1 besitzt.

Beweis:

Es sei F:=f-E(a). Aus Korollar 3.1 und Satz 3.2 folgt die Behauptung für L=N.

Es sei $1 \leqq L < N$: $E(a) \in V^+_{N-1}$.; für L=o ist nichts zu zeigen.

a.

(3.1o) F besitze in X eine negative Alternante der Länge 2L+1 mit den Alternantenpunkten $x_i \in X$, $1 \leqq i \leqq 2L+1$.

Annahme:

$$E(b,x) = \sum_{i=1}^{L_1} a_i e^{s_i x} \in V^+_N \text{ mit der Länge } L_1 \text{ ist eine} \tag{3.11}$$

bessere Approximation an f: $||F||_X > ||f-E(b)||_X$.

Damit gilt nach Satz 3.2 $L_1 > L$ und

(3.12) $E := E(b)-E(a) = (f-E(a))-(f-E(b))$ besitzt in (x_1, x_{2L+1}) mindestens 2L Nullstellen.

Im Vorzeichenvektor S:=sign(E) liegen also mindestens 2L Vorzeichenwechsel vor. Da aber S genau L negative Komponenten enthält, muß gelten:

1. $s_1 < t_1$ und $t_L < s_{L_1}$
2. Für jedes i mit $1 \leqq i \leqq L-1$ gibt es im Spektrum von E(b) ein s(i) mit $t_i < s(i) < t_{i+1}$.

Damit erhält man

$$\lim_{x\to-\infty} E(x)e^{-s_1 x} = \lim_{x\to-\infty} \Big(b_1 + \sum_{i=2}^{L_1} b_i e^{(s_i - s_1)x} - \sum_{i=i}^{L} a_i e^{(t_i - s_1)x}\Big) =$$

$$= b_1 > o \quad \text{und entsprechend}$$

$\lim_{x\to\infty} E(x)e^{-s_{L_1} x} = b_{L_1} > o$. Da in S höchstens 2L Vorzeichenwechsel auftreten können, besitzt $E \neq o$ genau 2L reelle Nullstellen, die nach (3.12) in (x_1, x_{2L+1}) liegen.

Damit gilt für $i \in \{1, 2L+1\}$ $E(x_i) > o$, also $E(b,x_i) > E(a,x_i)$, und wegen (3.11) $f(x_i) > E(a,x_i)$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu (3.1o); die Annahme (3.11) ist damit falsch und E(a) ist Minimallösung für f bzgl. V^+_N.

b.

(3.13) Es sei $E(a) \in V^+_{N-1}$ Minimallösung bzgl. V^+_N für f auf X.

E(a) ist dann auch Minimallösung bzgl. V^o_L und F besitzt eine Alternante der Länge 2L+1 in X.

Annahme:

(3.14) F besitzt in X keine negative Alternante der Länge 2L+1.

Daraus folgt, daß jede Alternante von F in X höchstens die Länge 2L+1 hat, denn in jeder Alternante mit größerer Länge ist eine negative Alternante der Länge 2L+1 enthalten. E(a) ist daher keine Minimallösung bzgl. V_{L+1}; es gilt also $\inf\limits_{v\in V_{L+1}} ||f-v||_X < ||F||_X = \inf\limits_{v\in V_L^+} ||f-v||_X$

und V_{L+1} enthält eine bessere Approximation E(b) an f auf X:

$$||f-E(b)||_X < ||F||_X$$

Es sei x_1 bzw. x_{2L+1} der kleinste bzw. größte Alternantenpunkt einer Alternante der Länge 2L+1 von F in X.
Nach Satz 3.2 gilt $grd(E(b))=L+1$ und mit $E=E(b)-E(a)$ erhält man für $i\in\{1,2L+1\}$ wegen (3.14):

(3.15) $$E(x_i)>o \ .$$

Wie oben besitzt E mindestens 2L Nullstellen in (x_1,x_{2L+1}) und wegen $E\neq o$ treten in $S=sign(E)$ mindestens 2L Vorzeichenwechsel auf. Daraus folgt, daß die Spektren von E(a) und E(b) disjunkt sind; deshalb besteht S aus 2L+1 Komponenten.

(3.16) In S treten also genau 2L Vorzeichenwechsel auf

(3.17) und E besitzt daher genau 2L reelle Nullstellen, die in (x_1,x_{2L+1}) liegen.

Es wird gezeigt: Aus (3.16) und (3.17) folgt $E(b)\in V_{L+1}^+-V_L^+$.
Damit für $E(b)\in V_{L+1}-V_{L+1}^o$ (3.16) gilt, muß erfüllt sein:

(3.18a) $$E(b,x)=(b_1+b_2x)e^{s_1x}+\sum_{i=2}^{L} b_{i+1}e^{s_ix} \quad \text{mit } b_2>o \text{ und}$$
$$s_1<t_1<s_2<t_2<\ldots<s_L<t_L \quad \text{oder}$$

(3.18b) $$E(b,x)=\sum_{i=1}^{L-1} b_ie^{s_ix}+(b_L+b_{L+1}x)e^{s_Lx} \quad \text{mit } b_{L+1}<o \text{ und}$$
$$t_1<s_1<t_2<s_2<\ldots<t_L<s_L \quad \text{oder o.B.d.A.}$$

(3.19) $$E(b,x)=\sum_{i=o}^{2} b_{i+1}x^i\, e^{s_1x}+\sum_{i=2}^{L-1} b_{i+2}e^{s_ix} \quad \text{mit } b_3>o \text{ und}$$
$t_1<s_1<t_2<s_2<\ldots<s_{L-1}<t_L$ (wesentlich für das Folgende ist nur $t_1<s_1<t_L$)

Die Vorzeichen der übrigen Parameter sind damit, ebenso wie weiter unten, positiv, was jedoch nicht benötigt wird.

E(b) nach (3.18 a) ergibt

$$\lim_{x\to\infty} E(x)e^{-t_L x} = \lim_{x\to\infty}((b_1+b_2x)e^{(s_1-t_L)x} + \sum_{i=2}^{L} b_{i+1}e^{(s_i-t_L)x} - \sum_{i=1}^{L-1} a_i e^{(t_i-t_L)x} - a_L) = -a_L < o \quad \text{und}$$

$$\lim_{x\to-\infty} E(x)e^{-s_1 x} = \lim_{x\to-\infty}((b_1+b_2x) + \sum_{i=2}^{L} b_{i+1}e^{(s_i-s_1)x} - \sum_{i=1}^{L} a_i e^{(t_i-s_1)x}) = -\infty \,.$$

Mit E(b) gemäß (3.18b) erhält man entsprechend

$\lim_{x\to\infty} E(x)e^{-s_L x} = -\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} E(x)e^{-t_1 x} = -a_1 < o$ und mit E(b) nach (3.19) $\lim_{x\to\infty} E(x)e^{-t_L x} = -a_L < o$ und $\lim_{x\to-\infty} E(x)e^{-t_1 x} = -a_1 < o$.

Dies steht im Widerspruch zu (3.15) und (3.17) und damit ist gezeigt: $\quad E(b) \notin V_{L+1} - V^o_{L+1}$.

Für $E(b,x) = \sum_{i=1}^{L+1} b_i e^{s_i x} \in V^o_{L+1}$ gibt es genau drei Möglichkeiten, so daß (3.16) erfüllt ist:

1. Es gilt $s_1<s_2<t_1<s_3<\ldots<s_{L+1}<t_L$ und $b_1<o$, $b_2>o$.

   Damit folgt aber

$$(3.2o) \quad \lim_{x\to\infty} E(x)e^{-t_L x} = -a_L < o \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} E(x)e^{-s_1 x} = b_1 < o \,.$$

2. Es ist $t_1<s_1<t_2<\ldots<s_{L-1}<t_L<s_L<s_{L+1}$ mit $b_L>o$ und $b_{L+1}<o$ erfüllt. Man erhält hier analog:

$$(3.21) \quad \lim_{x\to\infty} E(x)e^{-s_{L+1} x} = b_{L+1} < o, \quad \lim_{x\to-\infty} E(x)e^{-t_1 x} = -a_1 < o \,.$$

Wie oben liefern (3.2o) und (3.21) den gewünschten Widerspruch.

3. Es ist $s_1<t_1<s_2<\ldots<s_L<t_L<s_{L+1}$.
   Hier enthält S genau dann 2L Vorzeichenwechsel, wenn $E(b) \in V^+_{L+1}$ erfüllt ist.

Damit ist gezeigt:

(3.22) Unter der Annahme, daß (3.14) gilt, gibt es in V_{L+1} eine bessere Approximation an f auf X und jede bessere Approximation in V_{L+1} ist Element von $V^+_{L+1} \subseteq V^+_N$.

Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung (3.13) und die Annahme (3.14) ist daher falsch.
Damit ist der Satz ganz gezeigt.

Aus Satz 3.4 erhält man unmittelbar:

<u>Korollar 3.2</u> (Braess, [1])

$E(a) \in V^+_N$ mit dem Grad L sei Minimallösung für f auf X bzgl. V^+_N.
Behauptung:

a. Gilt $L<N$, dann ist $E(a)$ beste Approximation an f auf X bzgl. V^+_n für alle $n>L$, $n \in \mathbb{N}$.
b. Gilt $L=N$, dann hat für $n<L$ die beste Approximation an f auf X bzgl. V^+_n die Länge n .

Beweis:
Für $L<N$ besitzt $f-E(a)$ in X nach Satz 3.4 eine negative Alternante der Länge $2L+1$, woraus unmittelbar die erste Teilbehauptung folgt.
Es sei $L=N$; ist für ein $i \in \mathbb{N}$ mit $i<N$ $E(b) \in V^+_i$ mit der Länge $i-1$ Minimallösung für f bzgl. V^+_i, dann ist $E(b)$ also auch beste Approximation an f bzgl. V^+_N . Wegen $E(b) \neq E(a)$ steht dies im Widerspruch zu Satz 3.2 .

<u>Korollar 3.3</u> (Braess, [3])

$E(a) \in V^+_{N-1}$ sei Minimallösung für f auf X bzgl. V^+_{N-1}, nicht aber bzgl. V^+_N; $E(b) \in V_N$ sei eine bessere Approximation an f.
Behauptung:

a. $$E(b) \in V^+_N - V^+_{N-1}$$

b. Mit $E(a,x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i e^{t_i x}$ und $E(b,x) = \sum_{i=1}^{N} b_i e^{s_i x}$ gilt

$$s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < s_N .$$

Beweis:
Aus der Voraussetzung folgt: E(a) besitzt nach Korollar 3.2 die Länge N-1 und f-E(a) hat in X eine Alternante der Länge 2N-1; jede Alternante der Länge 2N-1 von f-E(a) in X ist nicht negativ und es gibt keine Alternante größerer Länge in X für f-E(a).
Daraus ergibt sich - man beachte (3.22) - wie im Beweis zu Satz 3.4 die Behauptung.

Es wird nun eine Verallgemeinerung von Korollar 3.3 angegeben, die Aussagen über die Vorzeichenvektoren von besten Approximationen ermöglicht.

Bemerkung 3.3 (Braess, [1])
Besitzt ein Vorzeichenvektor mit k Komponenten w Vorzeichenwechsel, so gilt $|k^+-k^-|\leq k-w$, wobei k^+ bzw. k^- die Zahl der positiven bzw. negativen Komponenten ist.
Beweis:
1.Fall: $k^-\leq k^+$
Es gilt $w\leq 2k^-$; unter Beachtung von $k^++k^-=k$ folgt damit
$$|k^+-k^-|=k^+-k^-=k^++k^--2k^-\leq k-w \ .$$
2.Fall: $k^->k^+$
Hier gilt entsprechend $w\leq 2k^+$ und daher wie oben
$$|k^+-k^-|=k^--k^+=k^-+k^+-2k^+\leq k-w$$

Satz 3.5 (Braess, [1])
$E(a)\in V_N^o$ mit $S_1=\text{sign}(E(a))$ und $\text{grd}(E(a))=N$ sei Minimallösung für f bzgl. V_N^o auf X. $E(b)\in V_M$ mit dem Grad M und $S_2=\text{sign}(E(b))$ sei eine bessere Approximation an f.

Behauptung:
S_2 enthält mindestens ebensoviele positive und negative Komponenten wie S_1.
Beweis:
Da E(b) besser als E(a) approximiert, gilt M>N und $E:=E(b)-E(a)\not\equiv o$ besitzt mindestens 2N reelle Nullstellen (man vergleiche hierzu (3.12)). Daher besitzt $S=\text{sign}(E)$ mindestens 2N Vorzeichenwechsel.

Die Zahl der positiven (negativen) Komponenten in S_1 bzw. S_2 bzw. S sei gegeben durch p_1 (n_1) bzw. p_2 (n_2) bzw. p (n). Es gilt also

(3.23) $\quad p=n_1+p_2 \quad$ und $\quad n=n_2+p_1$.

Mit $grd(E) \leqq M+N$ erhält man nach Bemerkung 3.3

(3.23) $\quad |p-n| \leqq M+N-2N=M-N$

1.Fall: $\quad p-n = |p-n|$

Mit (3.23) gilt also

(3.24) $\quad N-M \leqq n_1+p_2-n_2-p_1 \leqq M-N$

Aus der ersten Ungleichung ergibt sich

$$p_2-n_2+p_2-p_2 \geqq N-M-n_1+p_1=N-M-n_1-p_1+2p_1$$

$$2p_2-M \geqq -M+2p_1$$

$$p_2 \geqq p_1$$

Entsprechend ergibt die zweite Ungleichung in (3.24)

$$2n_1-N \leqq M-N-p_2-n_2+2n_2=-N+2n_2$$

$$n_1 \leqq n_2$$

2.Fall: $\quad p-n=-|p-n|$

Auch hier gilt (3.24) wegen $p-n \leqq |p-n|$; es folgt also

$$p_2 \geqq p_1 \quad \text{und} \quad n_1 \leqq n_2.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Bemerkung:

Es sei darauf hingewiesen, daß für V_N^- die Satz 3.4, **Korollar 3.2 und** Korollar 3.3 entsprechenden Aussagen gelten; die Beweise verlaufen analog, man hat nur die Vorzeichen zu vertauschen.

Für Fragestellungen, wie sie zum Beispiel in der Physik oder Chemie auftreten (Behandlung von Abklingvorgängen, radioaktiver Zerfall), sind besonders die Ergebnisse wichtig, die die Approximation bzgl. V_N^+ betreffen, da hier die linearen Koeffizienten a_i meist Massen darstellen und damit im allgemeinen nicht negativ sein sollen.