§2 Existenzsätze

2.1 Gleichmäßige Konvergenz im Innern

In diesem Paragraphen sei I stets das Intervall $[a,b]$ mit $a<b$.

Während bei linearer Approximation die Existenz einer Minimallösung stets gesichert ist, können Existenzsätze für nichtlineare Approximation nur unter einschneidenden Voraussetzungen bewiesen werden.
Für $V \subsetneq C(I)$ hat Rice in [15] gezeigt:
Es existiert eine beste Approximation an $f \in C(I)$ bzgl. V auf I, wenn V den beiden folgenden Forderungen genügt:

(2.1) 1. Für $u,v \in V$ gilt: $u-v$ besitzt in I höchstens n Nullstellen oder verschwindet auf I identisch.

(2.2) 2. Jede punktweise konvergente Folge in V konvergiert gegen ein Element von V.

Aus (2.1) folgt für jede auf I gleichmäßig beschränkte Teilmenge von V die Existenz einer auf I punktweise konvergenten Folge und mit (2.2) folgt daraus die Existenz einer besten Approximation bzgl. V ([15], Theorem 7-2).

Dabei heißt $U \subseteq C(I)$ gleichmäßig beschränkt auf I, wenn es ein $K<\infty$ gibt mit $||u||_I \leq K$ für $u \in U$.
V_N genügt der ersten Forderung mit $n=2N-1$ nach Satz 1.1, nicht jedoch der zweiten:

<u>Beispiel 2.1</u>
Man betrachte in $[o,1]$ die Funktionen $E(a_m,x)=e^{-mx}+e^{m(x-1)} \in V_2^o$ für $m \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{m\to\infty} E(a_m,x) = \begin{cases} 1 & : \quad x=o \\ o & : \quad x \in (o,1) \\ 1 & : \quad x=1 \end{cases} .$$

Will man beim Nachweis der Existenz einer Minimallösung bzgl. V_N analog vorgehen, so muß man also einen anderen Konvergenzbegriff verwenden; es wird definiert:

Definition 2.1

Eine Folge von Funktionen aus $C(I)$ konvergiert gleichmäßig im Innern von I gegen $g \in C(I)$, wenn sie auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von (a,b) gleichmäßig gegen g konvergiert.

Die in Beispiel 2.1 gegebene Folge $(E(a_m))_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert im Innern von $[o,1]$ gleichmäßig gegen ein Element von V_2, nämlich die Nullfunktion;
es zeigt sich, daß dies allgemein für jede gleichmäßig beschränkte Folge in V_N gilt und daß diese Eigenschaft die Existenz einer besten Approximation gewährleistet. Der Beweis wird für eine allgemeinere Menge von Funktionen durchgeführt, die eine (2.2) entsprechende Eigenschaft besitzt:

Definition 2.2

$DZ^n(I) := \{h \mid h \in C^{n+1}(I),\ D^{n+1}h$ hat in I höchstens $n-1$ Nullstellen oder verschwindet auf I identisch$\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.1

Nach Satz 1.1 und Bemerkung 1.2 gilt $V_N \subseteq DZ^N(I)$ für $N \in \mathbb{N}$.

Definition 2.3

Für $d > o$, $h \in C^n(I)$ und $n \in \mathbb{N}$ wird gesetzt:

$$Z^m(h) := \begin{cases} \emptyset & : \ D^m h \equiv o \text{ auf } I \\ \{x \in I \mid D^m h(x) = o\} & : \ D^m h \not\equiv o \text{ auf } I \end{cases} \qquad o \leq m \leq n,$$

$$I^m(h,d) := \{x \in I \mid md \leq |x-z| \text{ für } z \in \{a,b\} \cup \bigcup_{i=o}^{m+1} Z^i(h)\}, \qquad o \leq m \leq n-1.$$

Hilfssatz 2.1 (Werner, [2o])

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $h \in C^{n+1}(I)$ gegeben. Mit $d > o$ sei $I^i(h,d)$ nicht leer, $o \leq i \leq n$.

Behauptung: $$\|D^i h\|_{I^i(h,d)} \leq d^{-i} \|h\|_I \qquad o \leq i \leq n.$$

Beweis: Vollständige Induktion nach i:
Man setze $K_{i-1} := d^{-(i-1)}\,||h||_I$ für $i \in \mathbb{N}$.

Für i=o ist nichts zu zeigen.
Die Behauptung sei für $i-1 < n$ gezeigt, d.h. mit $g = D^{i-1}h$ gilt:
$$||g||_{I^{i-1}(h,d)} \leq K_{i-1}$$

Induktionsschluß:
In I sei $Dg \neq o$, sonst ist nichts zu zeigen.
Mit den Punkten von $Z^{i+1}(h)$ erhält man in $I^{i-1}(h,d)$ abgeschlossene Teilintervalle J_k; falls $Z^{i+1}(h)$ leer ist oder für $x \in I^{i-1}(h,d)$ stets $D^{i+1}h(x) \neq o$ gilt, sind die J_k die Teilintervalle, die $I^{i-1}(h,d)$ bilden.
Die Teilintervalle, die mit $I^i(h,d)$ einen nichtleeren Durchschnitt besitzen, seien o.B.d.A. die Intervalle J_k, $1 \leq k \leq K < \infty$.
Nach Definition 2.3 gilt für $1 \leq k \leq K$:
a. Dg ist in J_k monoton und wechselt sein Vorzeichen nicht.
b. In J_k nimmt $|Dg|$ sein Maximum in einem Randpunkt $u_k \in J_k$ an, wobei gilt:
   $u_k \in Z^{i+1}(h)$ oder u_k gehört zum Rand von $I^{i-1}(h,d)$.
Es sei nun $x \in J_k$.
Nach Induktionsannahme gilt $|g(x) - g(u_k)| \leq K_{i-1}$
und mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung erhält man
$$|g(x)-g(u_k)| = \left|\int_{u_k}^{x} Dg(t)\,dt\right| = |(x-u_k)Dg(t_o)| \quad \text{für ein } t_o \in (u_k,x)$$
$$\text{bzw.} \quad t_o \in (x,u_k).$$

Da Dg in J_k sein Vorzeichen nicht wechselt, ergibt sich mit Punkt b. $|Dg(t_o)| \geq |Dg(x)|$ und damit
$$K_{i-1} \geq |x-u_k|\,|Dg(x)| .$$
Gilt insbesondere $x \in I^i(h,d) \cap J_k$, dann folgt $|x-u_k| \geq d$ und damit $K_{i-1} \geq d\,|Dg(x)|$.
Für $x \in I^i(h,d)$ hat man also erhalten:
$$|D^i h(x)| \leq d^{-1}K_{i-1} = d^{-i}\,||h||_I; \text{ dies war zu zeigen.}$$

Eine weitere Abschätzung für Dh liefert Hilfssatz 2.2:

Hilfssatz 2.2 (Schmidt, [17])

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $h \in DZ^n(I)$ gegeben; mit $d=b-a$ und $K := \max_{1 \leq i \leq n} \max\{|D^i h(a)|, |D^i h(b)|\}$ gilt:

$$||Dh||_I \leq K \sum_{j=o}^{n-1} d^j \quad .$$

Beweis:

Nach Definition von K gilt $|Dh(a)| \leq K \sum_{j=o}^{n-1} d^j \geq |Dh(b)|$.

Es ist also noch zu zeigen:

$$|Dh(x)| \leq K \sum_{j=o}^{n-1} d^j \qquad x \in (a,b) \quad .$$

1. Rekursiv wird definiert: $K_1 := K \sum_{j=o}^{n-1} d^j$

$$K_i := (K_{i-1} - K)d^{-1} \qquad 2 \leq i \leq n.$$

Vollständige Induktion nach i ergibt:

$$K_i = K \sum_{j=o}^{n-i} d^j \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{2.3}$$

Für i=1 ist nichts zu zeigen; es gelte (2.3) für i < n.

Induktionsschluß:

$$K_{i+1} = (K_i - K)d^{-1} = Kd^{-1}\left(\sum_{j=o}^{n-i} d^j - 1\right) = Kd^{-1} \sum_{j=1}^{n-i} d^j = K \sum_{j=o}^{n-i-1} d^j \quad .$$

Damit ist (2.3) vollständig gezeigt.

Unmittelbar folgt hieraus:

$$K_i \geq K \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{2.4}$$

2. Annahme: Die Behauptung des Satzes ist falsch, es gibt ein $x_o \in (a,b)$ mit $|Dh(x_o)| > K \sum_{j=o}^{n-1} d^j = K_1$.

Durch vollständige Induktion nach i wird gezeigt:

(2.5) $D^i h$ besitzt in (a,b) $i-1$ Nullstellen $x_1^i < x_2^i < \ldots . < x_{i-1}^i$ und es ist $|D^{i-1} h(x_r^i)| > K_{i-1}$, $r \in \{1, i-1\}$, für $2 \leq i \leq n+1$.

i=2: $|Dh(a)| \leq K \geq |Dh(b)|$ gilt nach Voraussetzung.

Wegen $|Dh(x_o)| > K_1 \geq K$ und $h \in C^{n+1}(I)$ gibt es ein $x_1^2 \in (a,b)$ mit $|Dh(x_1^2)| > K_1$ und $D^2 h(x_1^2) = o$. Damit ist (2.5) für i=2 gezeigt.

Induktionsannahme: (2.5) gilt für $i < n+1$.

Induktionsschluß: Für $i+1$ erhält man mit dem Satz von Rolle:

(2.6) $D^{i+1}h$ hat in (x_1^i, x_{i-1}^i) mindestens $i-2$ Nullstellen $x_2^{i+1} < x_3^{i+1} < \dots < x_{i-1}^{i+1}$.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert mit der Induktionsannahme:

Es gibt ein $x_1 \in (a, x_1^i)$ und ein $x_2 \in (x_{i-1}^i, b)$ mit

$$D^i h(x_1) = \frac{D^{i-1}h(x_1^i) - D^{i-1}h(a)}{x_1^i - a} \quad \text{und} \quad D^i h(x_2) = \frac{D^{i-1}h(b) - D^{i-1}h(x_{i-1}^i)}{b - x_{i-1}^i};$$

Es folgt:

$$|D^i h(x_1)| \geqq \frac{|D^{i-1}h(x_1^i)| - |D^{i-1}h(a)|}{|x_1^i - a|} \quad \text{und}$$

$$|D^i h(x_2)| \geqq \frac{|D^{i-1}h(x_{i-1}^i)| - |D^{i-1}h(b)|}{|x_{i-1}^i - b|}$$

Mit $D^i h(x_1^i) = D^i h(x_{i-1}^i) = o$, $|D^{i-1}h(a)| \leqq K \geqq |D^{i-1}h(b)|$, $|x_1^i - a| < d > |b - x_{i-1}^i|$ und der Induktionsannahme erhält man:

$|D^i h(x_1)| > (K_{i-1} - K)d^{-1} = K_i < |D^i h(x_2)|$.

Wie oben folgt mit (2.4): Es gibt ein $x_1^{i+1} \in (a, x_1^i)$ und ein $x_i^{i+1} \in (x_{i-1}^i, b)$ mit

$$|D^i h(x_1^{i+1})| > K_i,\ D^{i+1}h(x_1^{i+1}) = o \text{ und } |D^i h(x_i^{i+1})| > K_i,$$
$$D^{i+1}h(x_i^{i+1}) = o\ .$$

Mit (2.6) erhält man insgesamt: $D^{i+1}h$ besitzt in (a,b) $(i-2)+2=i$ Nullstellen $x_1^{i+1} < x_2^{i+1} < \dots < x_i^{i+1}$ mit

$$|D^i h(x_r^{i+1})| > K_i,\ r \in \{1,i\}.$$

Damit ist (2.5) gezeigt.

3. Auf $i=n+1$ angewandt erhält man:
$D^{n+1}h$ besitzt in (a,b) n Nullstellen $x_1^{n+1} < x_2^{n+1} < \dots < x_n^{n+1}$ und $D^{n+1}h$ verschwindet auf I nicht identisch. Dies steht im Widerspruch zu $h \in DZ^n(I)$; damit ist die Annahme widerlegt und die Behauptung gilt.

Nach Bemerkung 1.2 folgt aus Hilfssatz 2.2 wegen $V_N \subseteq DZ^N(I)$ unmittelbar

Korollar 2.1

Für $h \in V_N$ mit $N \in \mathbb{N}$ gilt $||D^m h||_I \leq K_m \sum_{j=o}^{N-1} d^j$, $m \in \mathbb{N}$,

wobei $d=b-a$ und $K_m = \max_{m \leq i \leq m+N-1} \max\{|D^i h(a)|, |D^i h(b)|\}$ ist.

Satz 2.1 (Schmidt, [17])

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $I_1=[a_1,b_1] \subseteq (a,b)$ mit $d_o=\min\{a_1-a, b-b_1\} > o$ gegeben, $d=b-a$.

Behauptung: Es gibt ein $K(I,I_1) < \infty$, so daß jedes $h \in DZ^n(I)$

$$\text{erfüllt:} \quad ||Dh||_{I_1} \leq K(I,I_1)\,||h||_I \,.$$

Beweis:

1. Für $h \in DZ^n(I)$ gilt $|Z^{n+1}(h)| \leq n-1$

   und aus dem Satz von Rolle folgt $|Z^i(h)| \leq |Z^{i+1}(h)|+1$

   für $o \leq i \leq n$. Damit erhält man:

$$|Z^{n+1-k}(h)| \leq |Z^{n+1}(h)|+k \leq n-1+k \quad \text{für } o \leq k \leq n+1 \,. \tag{2.7}$$

   Für $k=o$ gilt (2.7) unmittelbar.

   Für $k < n+1$ sei (2.7) gezeigt; es ergibt sich damit

   $|Z^{n+1-(k+1)}(h)| \leq |Z^{n+1-k}(h)|+1 \leq n-1+(k+1)$ nach Induktionsannahme und (2.7) ist gezeigt.

   Für jedes $h \in DZ^n(I)$ erhält man damit

$$s = \sum_{k=o}^{n+1} (n-1+k) = (n+2)(n-1) + \sum_{k=o}^{n+1} k = (n+2)\frac{3n-1}{2} \geq$$
$$\geq \sum_{i=o}^{n+1} Z^i(h)$$

2. Wegen $3 \leq s < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$ existieren für jedes $h \in DZ^n(I)$ abgeschlossene Intervalle $I_1(h)$, $I_2(h)$ mit der

   Länge $d_1 = \frac{d_o}{2(s+1)} > o$, die $I_1(h) \subseteq (a,a_1]$, $I_2(h) \subseteq [b_1,b)$

   und $I_j(h) \cap \bigcup_{i=o}^{n+1} Z^i(h) = \emptyset$ für $j=1,2$ erfüllen.

   ($[a,b]$ hat die Länge $b-a$, $\frac{a+b}{2}$ ist die Intervallmitte)

Es seien a(h) bzw. b(h) die Intervallmitten von $I_1(h)$ bzw. $I_2(h)$ und es gilt daher

$|a(h)-z| > \frac{d_1}{2} < |b(h)-z|$ für $z \in \bigcup_{i=o}^{n+1} Z^i(h)$. Hilfssatz 2.1 ergibt für a(h), b(h): $|D^i h(a(h))| \leq ||h||_I \left(\frac{d_1}{2n}\right)^{-i} \geq |D^i h(b(h))|$,

$$o \leq i \leq n .$$

Mit $K := ||h||_I \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{d_1}{2n}\right)^{-i}$ gilt also für $1 \leq i \leq n$

$$|D^i h(a(h))| \leq K \geq |D^i h(b(h))| .$$

Hilfssatz 2.2, angewandt auf $I(h) = [a(h), b(h)]$, ergibt

$$||Dh||_{I(h)} \leq K \sum_{j=o}^{n-1} (b(h)-a(h))^j \leq K \sum_{j=o}^{n-1} d^j .$$

Aus $I_1 \subseteq I(h)$ folgt:

$$||Dh||_{I_1} \leq ||h||_I \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{d_1}{2n}\right)^{-i} \sum_{j=o}^{n-1} d^j .$$

Mit $K(I, I_1) := \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{d_1}{2n}\right)^{-i} \sum_{j=o}^{n-1} d^j$ erhält man die Behauptung für jedes $h \in DZ^n(I)$, da $K(I, I_1)$ allein durch die Größen d und d_o und damit durch I und I_1 bestimmt ist.

Speziell für $h \in V_N$ läßt sich mehr aussagen:

Satz 2.2 (Werner, [21])
Es sei $N \in \mathbb{N}$ und I_1, d und d_o wie in Satz 2.1 .
Für $j \in \mathbb{N}$ gibt es ein $K(j, I, I_1) < \infty$, so daß für $h \in V_N$ gilt:

$$||D^j h||_{I_1} \leq K(j, I, I_1) \, ||h||_I .$$

Beweis: Man erhält hier analog:

1. Wegen Satz 1.1 gilt hier für alle $h \in V_N$:

$$s_n = (N-1)(n+2) \geq \left| \bigcup_{i=o}^{n+1} Z^i(h) \right| \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. Es sei $n \in \mathbb{N}$.
Mit $0 \leq s_n < \infty$ existieren für jedes $h \in V_N$ Intervalle $I_1(h)$ und $I_2(h)$ mit der Länge $d_n = \frac{d_0}{2(s_n+1)}$, so daß $I_1(h) \subseteq (a, a_1]$ $I_2(h) \subseteq [b_1, b)$ und $I_j(h) \cap \bigcup_{i=0}^{n+1} Z^i(h) = \emptyset$, $j=1,2$ gilt.
Man erhält wieder (Bezeichnungen wie oben):

$$|D^i h(a(h))| \leq ||h||_I \left(\frac{d_n}{2n}\right)^{-i} \geq |D^i h(b(h))| \qquad i \in \mathbb{N},\ i \leq n.$$

Mit $K_j := \max_{j \leq i \leq N+j-1} \left(\frac{d_n}{2n}\right)^{-i} ||h||_I$ für $j \in \mathbb{N}$ gilt für $j \leq i \leq N+j-1$ mit $N+j-1 \leq n$: $\quad |D^i h(a(h))| \leq K_j \geq |D^i h(b(h))|$
Nach Korollar 2.1 folgt für $N+j-1 \leq n$:

$$||D^j h||_{I(h)} \leq \left[\sum_{j=0}^{N-1} (b(h)-a(h))^j\right] K_j \text{ , also}$$

$||D^j h||_{I_1} \leq ||h||_I K(j, I, I_1)$, wobei für $j \in \mathbb{N}$ mit $N+j-1 \leq n$ gesetzt wird: $K(j,I,I_1) := \max_{j \leq i \leq N+j-1} \left(\frac{d_n}{2n}\right)^{-i} \sum_{j=0}^{N-1} d^j$.

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig angenommen war, gilt die Behauptung.

Wir sind nun in der Lage, einen Satz zu beweisen, der Theorem 7-2 in [15] entspricht:

<u>Satz 2.3</u> (Schmidt, [17])

Mit $n \in \mathbb{N}$ sei $M \subseteq DZ^n(I)$ auf I gleichmäßig beschränkt.
Behauptung: Es gibt eine Folge von Elementen aus M, die im Innern von I gleichmäßig konvergiert.

Beweis:
Es sei $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallfolge in I mit $I_n = [a_n, b_n]$,

$$a_n = a + \frac{b-a}{n+2}, \quad b_n = b - \frac{b-a}{n+2}.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $K < \infty$ mit $||h||_I < K$ für alle $h \in M$. Damit ist M auch gleichmäßig stetig in I_n für $n \in \mathbb{N}$:

Denn nach Satz 2.1 gibt es ein $K(I,I_n) < \infty$, so daß für $h \in M$ gilt: $||Dh||_{I_n} \leqq K(I,I_n)||h||_I \leqq K(I,I_n)K =: K_n < \infty$.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2 \in I_n$ mit $x_1 < x_2$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $x \in (x_1, x_2)$ mit $|h(x_1)-h(x_2)| = |Dh(x)|\,|x_1-x_2|$. Hieraus folgt für alle $h \in M$

$|h(x_1)-h(x_2)| \leqq K_n|x_1-x_2|$, womit die gleichmäßige Stetigkeit von M auf I_n, $n \in \mathbb{N}$, nachgewiesen ist.

Mit dem Satz von Ascoli ([6], S.127) erhält man:
In M existiert eine auf I_1 gleichmäßig konvergente Folge $(h_{1,m})_{m \in \mathbb{N}}$.
$(h_{1,m})_{m \in \mathbb{N}} \subseteq M$ ist gleichmäßig beschränkt auf I und gleichmäßig stetig auf I_2. Damit enthält $(h_{1,m})_{m \in \mathbb{N}}$ eine auf I_2 gleichmäßig konvergente Folge $(h_{2,m})_{m \in \mathbb{N}}$. Wegen $(h_{2,m})_{m \in \mathbb{N}} \subseteq M$ enthält wiederum $(h_{2,m})_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge $(h_{3,m})_{m \in \mathbb{N}}$, die auf I_3 gleichmäßig konvergiert, usw.; man erhält so für $n \in \mathbb{N}$ Teilfolgen $(h_{n,m})_{m \in \mathbb{N}} \subseteq M$, die auf I_n, und damit auch auf I_j, $1 \leqq j \leqq n$, gleichmäßig konvergieren.
Wegen $h_{m,m} \in (h_{n,j})_{j \in \mathbb{N}}$ für $m \geqq n$ folgt (Auswahl nach dem Diagonalverfahren): $(h_{m,m})_{m \in \mathbb{N}} \subseteq M$ konvergiert gleichmäßig auf I_n für alle $n \in \mathbb{N}$.
Nach Konstruktion von $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es für jedes abgeschlossene Intervall $J \subseteq (a,b)$ ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß $J \subseteq I_n$ für $n \geqq n_o$ erfüllt ist; damit gilt die Behauptung.

Wegen $V_N \subseteq DZ^N(I)$ ist der Satz unmittelbar auf gleichmäßig beschränkte Teilmengen von V_N anwendbar; es gilt sogar

<u>Korollar 2.2</u> (Werner, [21])

Es sei $N, J \in \mathbb{N}$.
Ist $V \subseteq V_N$ auf I gleichmäßig beschränkt, dann enthält V eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß $(D^j h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $0 \leqq j \leqq J-1$, gleichmäßig im Innern von I konvergiert.

Beweis: Vollständige Induktion nach J :

Für $J=1$ gilt die Behauptung nach Satz 2.3 . Die Behauptung gelte für $J\in\mathbb{N}$: Es gebe also eine Folge $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in V, so daß $(D^j h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ für $0\leq j\leq J-1$ gleichmäßig im Innern von I konvergiert. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei die Intervallfolge von Satz 2.3; nach Satz 2.2 gibt es für alle $n\in\mathbb{N}$ ein $K(J,I,I_n)<\infty$ mit

$$||D^J h_m||_{I_n} \leq K(J,I,I_n)\,||h_m||_I \qquad m\in\mathbb{N}$$

Da V auf I gleichmäßig beschränkt ist, ist auch $(D^J h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ auf I_n für $n\in\mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt. Damit gibt es in $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(h_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$, so daß $(D^J h_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ im Innern von I_1 gleichmäßig konvergiert; $(h_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ wiederum enthält eine Teilfolge $(h_{2,m})_{m\in\mathbb{N}}$, so daß $(D^J h_{2,m})_{m\in\mathbb{N}}$ im Innern von I_2 gleichmäßig konvergiert, usw.:
Für $n>1$ gibt es also eine Folge $(h_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \subseteq (h_{n-1,m})_{m\in\mathbb{N}}$, so daß $(D^J h_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ im Innern von I_n gleichmäßig konvergiert.
Die Folge $(D^J h_{m,m})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gleichmäßig im Innern von I_n für alle $n\in\mathbb{N}$ und damit folgt wie in Satz 2.3 für diese Folge die gleichmäßige Konvergenz im Innern von I.
Nach Konstruktion gilt:
$(D^j h_{m,m})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert im Innern von I für $0\leq j\leq J$ gleichmäßig.
Damit ist der Satz bewiesen.

2.2 Abgeschlossenheit, Existenzsätze

Mit Satz 2.3 erhält man die Existenz einer besten Approximation für $f \in C(I)$, wenn M abgeschlossen ist im Sinne der Definition 2.4 (man vergleiche hierzu die Forderung (2.2)):

Definition 2.4

Eine Menge $V \subseteq C(I)$ heißt abgeschlossen, wenn gilt: Konvergiert eine Folge von Elementen aus V auf einem abgeschlossenen Intervall $I_1 \subseteq (a,b)$ gleichmäßig gegen h, dann stimmt h auf I_1 mit einem Element von V überein.

Satz 2.4 (Schmidt, [18])

Es sei $M \subseteq DZ^n(I)$ mit $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen.
Behauptung: Jede Funktion $f \in C(I)$ besitzt eine Minimallösung bezüglich M auf I.

Beweis:
$(h_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq M$ sei eine Minimalfolge für f:

$$\lim_{m\to\infty} ||f-h_m||_I = \inf_{h\in M} ||f-h||_I = R$$

Damit gibt es für $\delta > o$ ein $m(\delta) \in \mathbb{N}$ mit

$$||h_m||_I \leqq ||f||_I + ||f-h_m||_I \leqq ||f||_I + R + \delta \text{ für } m \geqq m(\delta);$$

$(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist also auf I gleichmäßig beschränkt:

$$||h_m||_I \leqq K, \text{ wobei}$$

$K := \max\{\max\{||h_m||_I \mid 1 \leqq m \leqq m(\delta)\}, ||f||_I + R + \delta\}$ ist.
Nach Satz 2.3 existiert in $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(h_m)_{m\in J}$, $J \subseteq \mathbb{N}$, die gleichmäßig im Innern von I konvergiert.
Da M abgeschlossen ist, konvergiert $(h_m)_{m\in J}$ auf jedem abgeschlossenen Intervall in (a,b) gleichmäßig gegen ein Element $h \in M$. Für $x \in (a,b)$ gilt also:

$$|f(x)-h(x)| = \lim_{m\to\infty} |f(x)-h_m(x)| \leqq \lim_{m\to\infty} ||f-h_m||_I = R, \quad m \in J.$$

Da $|f-h|$ auf I stetig ist, folgt hieraus

$$|f(a)-h(a)| \leqq R \geqq |f(b)-h(b)| \quad \text{und damit}$$

$$||f-h||_I = \max\{|f(a)-h(a)|, |f(b)-h(b)|, \sup_{x\in(a,b)} |f(x)-h(x)|\} \leqq R.$$

Damit ist h eine Minimallösung für f bzgl. M .

Bemerkung: Die Stetigkeit von f geht entscheidend bei der Ermittlung von $||f-h||_I$ ein.

Nach dem bisher Gezeigten ist die Aufgabe, die Existenz einer Minimallösung bzgl. V_N nachzuweisen, zurückgeführt auf das Problem, die Abgeschlossenheit von V_N zu zeigen. Es wird entscheidend benutzt, daß die Exponentialsummen Lösungen linearer Differentialgleichungen sind.

Satz 2.5 (Schmidt, [17]; Werner, [21])

Es sei $N \in \mathbb{N}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V_N$ konvergiere auf I gleichmäßig gegen die Funktion h.

Behauptung: $h \in V_N$

Beweis:

Die Länge und der Grad von h_n sind für alle $n\in\mathbb{N}$ höchstens gleich N; es kann daher o.B.d.A. angenommen werden:

$h_n(x) = \sum_{i=1}^{L} P_{i,n}(x) e^{t_{i,n}x}$, $L\neq o$ ist die Länge von h_n und

$\text{grd}(h_n) = k \leq N$ für $n\in\mathbb{N}$;

für L=o ist nichts zu zeigen. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Folge erhält man $h \in C(I)$ und wie oben (mit R=o) die gleichmäßige Beschränktheit von $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $||h_n||_I \leq K < \infty$, $n\in\mathbb{N}$.

Nach Korollar 2.2 gibt es eine Teilfolge $(h_n)_{n\in J_1}$, $J_1 \subseteq \mathbb{N}$, so daß die Folgen $(D^r h_n)_{n\in J_1}$, $o\leq r\leq k$, gleichmäßig im Innern von I konvergieren. Für jedes abgeschlossene Intervall I_o in (a,b) erhält man durch k-fache Anwendung des Satzes von der gliedweisen Differentiation:

(2.8) In I_o ist h k-fach differenzierbar und $(D^r h_n)_{n\in J_1}$ konvergiert auf I_o gleichmäßig gegen $D^r h$ für $o\leq r\leq k$.

Es sei $s_{m,n} = t_{i,n}$, $\sum_{j=1}^{i-1} (\text{grd}(P_{j,n})+1) < m \leq \sum_{j=1}^{i} (\text{grd}(P_{j,n})+1)$,

für $1\leq i\leq L$, $n\in\mathbb{N}$. (Wie üblich wird $\sum_{j=i}^{n} a_j := o$ für $n<i$ gesetzt)

Mit $C_n(t) = \prod_{m=1}^{k} (t-s_{m,n})$, $n\in\mathbb{N}$, gilt also $C_n(D)h_n = o$, $n\in\mathbb{N}$;

C_n ist das zu h_n gehörige charakteristische Polynom.

Die Folgen $(s_{m_i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ seien für $1\leq i\leq d$ beschränkt, für $d<i\leq k$ unbeschränkt mit $d\in\mathbb{N}\cup\{o\}$; es gibt also eine (unendliche) Teilmenge $J_2\subseteq J_1$ mit

$$(2.9)\qquad \begin{array}{lll} \lim\limits_{n\to\infty} s_{m_i,n} = s_i\in\mathbb{R}, & 1\leq i\leq d, & \text{und} \\ \lim\limits_{n\to\infty} |s_{m_i,n}| = \infty, & d<i\leq k, & \text{für } n\in J_2. \end{array}$$

Somit existiert ein $n_o\in\mathbb{N}$ mit $s_{m_i,n}\neq o$ für $d<i\leq k$ und $n\geq n_o$, $n\in J_2$; für $n\in J_2$, $n\geq n_o$ gilt auf I:

$$\left(\prod_{i=d+1}^{k} s_{m_i,n}^{-1}\right) C_n(D)h_n = \left(\prod_{i=1}^{d}(D-s_{m_i,n})\right)\left(\prod_{i=d+1}^{k}\left(\frac{D}{s_{m_i,n}}-1\right)\right)h_n = o$$

(Für $n<i$ wird $\prod_{j=i}^{n} a_j:=1$ gesetzt)

Aus (2.8) und (2.9) folgt auf I_o:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=d+1}^{k} s_{m_i,n}^{-1}\right) C_n(D)h_n = (-1)^{k-d}\prod_{i=1}^{d}(D-s_i)h = o,\ n\in J_2.$$

Da $I_o\subseteq(a,b)$ beliebig gewählt war, ist h in (a,b) und wegen $h\in C(I)$ in ganz I identisch mit einem Element aus $V_d\subseteq V_N$; dies war zu zeigen.

Dem Beweis zu Satz 2.5 entnimmt man unmittelbar:

Korollar 2.3 (Schmidt, [17])

Die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq V_N$ konvergiere auf I gleichmäßig gegen h; für $n\in\mathbb{N}$ gelte $h_n(x)=\sum_{i=1}^{L} P_{i,n}(x)e^{t_{i,n}x}$, $\mathrm{grd}(h_n)=N$ und und $\mathrm{grd}(P_{i,n})=k_i\in\mathbb{N}\cup\{o\}$. Weiterhin seien m Folgen $(t_{i_j,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $1\leq j\leq m$, unbeschränkt.

Behauptung: Es gilt $h\in V_{N-d}$ mit $d=\sum_{j=1}^{m}(k_{i_j}+1)$

Speziell für V_N^+ folgt:

Korollar 2.4 (Schmidt, [17]; Werner, [21])

Konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq V_N^+$ ($(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq V_N^-$) auf I gleichmäßig gegen h, dann gilt $h\in V_N^+$ ($h\in V_N^-$).

Beweis:
Der Beweis wird für $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V_N^+$ durchgeführt; im anderen Fall hat man nur $a_{i_j} \geq o$ bzw. $a_j \geq o$ durch $a_{i_j} \leq o$ bzw. $a_j \leq o$ zu ersetzen.
Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt wieder die gleichmäßige Beschränktheit von $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\|h_n\|_I \leq K < \infty$, $n\in\mathbb{N}$.
Mit $h_n(x) = \sum_{i=1}^{N} a_{i,n} e^{t_{i,n}x}$ erhält man nach Voraussetzung

$$\|a_{i,n} e^{t_{i,n}x}\|_I \leq K \quad \text{und} \quad |a_{i,n}| \leq K e^{-t_{i,n}a} \quad \text{für } n\in\mathbb{N}$$

Nach Korollar 2.2 gibt es damit (nach N-maliger Auswahl von Teilfolgen) eine (unendliche) Teilmenge $J \subseteq \mathbb{N}$, so daß die Folgen $(a_{i,n} e^{t_{i,n}x})_{n\in J}$, $1 \leq i \leq N$, im Innern von I gleichmäßig konvergieren. Die Folgen $(t_{i_j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ seien für $1 \leq j \leq N-d$ beschränkt, für $N-d < j \leq N$ unbeschränkt; es gibt daher ein $T < \infty$ mit

$$|t_{i_j,n}| \leq T, \; 1 \leq j \leq N-d, n\in\mathbb{N};$$

damit gilt $|a_{i_j,n}| \leq K e^{T|a|}$ für $1 \leq j \leq N-d$, $n\in\mathbb{N}$. Es gibt daher eine Teilfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_{i_j,n} = a_j \in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{n\to\infty} t_{i_j,n} = t_j \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leq j \leq N-d, \; n\in J_1 \subseteq J;$$

wegen $a_{i_j,n} \geq o$ für $n\in\mathbb{N}$ konvergieren also die Folgen $(a_{i_j,n} e^{t_{i_j,n}x})_{n\in J_1}$ im Innern von I gleichmäßig gegen $a_j e^{t_j x}$ mit $a_j \geq o$ für $1 \leq j \leq N-d$, für $N-d < j \leq N$ gegen die Nullfunktion (als einzigem Element von V_o) nach Korollar 2.3.

Damit gilt also $h(x) = \sum_{i=1}^{N-d} a_i e^{t_i x}$ für $x \in (a,b)$;

wegen $h \in C(I)$ ist dies für ganz I richtig und die Behauptung ist gezeigt.

Es ist damit gezeigt:

Korollar 2.5 (Schmidt, [17])

Die Mengen V_N, V_N^+, V_N^- sind abgeschlossen für $N \in \mathbb{N}$.

Beweis:
Es sei V eine Menge der Behauptung.
Konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ im Innern von I gleichmäßig, dann konvergiert diese Folge auf jedem abgeschlossenen Intervall in (a,b) gleichmäßig gegen ein $h \in V$, wie oben gezeigt; damit ist V abgeschlossen.

Aus Satz 2.4 folgt somit:

Satz 2.6 (Schmidt, [17]; Werner, [21])

Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $f \in C(I)$.
Behauptung:
Auf I besitzt f bezüglich jeder der drei Mengen V_N, V_N^+, V_N^- eine Minimallösung.

Bemerkung:
Es ist wesentlich, daß I ein reelles Intervall [a,b] ist, wie Beispiel 6.1 zeigt.

Es folgen nun Sätze, die für spätere Untersuchungen benötigt werden, bei deren Beweis jedoch Satz 2.5 eingeht.
Wichtig sind Aussagen über den Vorzeichenvektor der Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge in V_N, die Verallgemeinerungen von Korollar 2.4 darstellen.

Hilfssatz 2.3 (Braess, [2]; Werner, [21])

Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $h(x) = \sum_{i=o}^{N-1} a_i x^i e^{t_o x} \in V_N - V_{N-1}$ mit S=sign(h) gegeben; die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V_N^o - V_{N-1}$ mit $h_n(x) = \sum_{i=1}^{N} a_{i,n} e^{t_{i,n} x}$ konvergiere auf I gleichmäßig gegen h.
Behauptung:
Es gibt ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq n_o$ gilt: $h_n \in V_N^o(S)$.

Beweis:

Zum Beweis wird für h und h_n, $n\in\mathbb{N}$, die Darstellung durch Differenzenquotienten (nach Satz 1.2) benutzt:

$$h(x)=\sum_{i=o}^{N-1} b_i \Delta^i(t_o,\dots,t_o)e^{tx}$$

$$h_n(x)=\sum_{i=o}^{N-1} b_{i,n}\Delta^i(t_{1,n},\dots,t_{i+1,n})e^{tx}$$

Aus $\Delta^{N-1}(t_o,\dots,t_o)e^{tx} = \frac{1}{(N-1)!}\,x^{N-1}e^{t_o x}$ folgt

$$\operatorname{sign}(b_{N-1}) = \operatorname{sign}(a_{N-1}) \;.$$

Es wird nun gezeigt: Es gibt eine Teilfolge $(h_n)_{n\in J}$, $J\subseteq\mathbb{N}$, mit

(2.1o) $$\lim_{n\to\infty} b_{i,n} = b_i \;,\; o\leq i\leq N-1,\; n\in J.$$

Hierzu wähle man N Punkte x_j, $1\leq j\leq N$, mit $x_1<x_2<\dots<x_N$ in I; aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt dann

(2.11) $$\lim_{n\to\infty} h_n(x_j)= h(x_j) \;,\; 1\leq j\leq N.$$

Nach Korollar 2.3 sind die Folgen $(t_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $1\leq i\leq N$, beschränkt und nach dem Beweis von Satz 2.5 gibt es eine Teilfolge $(h_n)_{n\in J}$, $J\subseteq\mathbb{N}$, mit

$$\lim_{n\to\infty} t_{i,n} = t_o \;,\; n\in J \;,\; 1\leq i\leq N \;.$$

Aus Hilfssatz 1.3 folgt für $1\leq j\leq N$ und $n\in J$:

(2.12) $$\lim_{n\to\infty} \Delta^i(t_{1,n},\dots,t_{i+1,n})e^{tx_j} = \Delta^i(t_o,\dots,t_o)e^{tx_j}, \quad i<N.$$

Für $o\leq i\leq N-1$ und $1\leq j\leq N$ wird definiert:

$$d^n_{j,i+1}:=\Delta^i(t_{1,n},\dots,t_{i+1,n})e^{tx_j},\; d_{j,i+1}:=\Delta^i(t_o,\dots,t_o)e^{tx_j},$$

$$D_n := \begin{bmatrix} d^n_{1,1} & \cdots & d^n_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ d^n_{N,1} & \cdots & d^n_{N,N} \end{bmatrix}, \qquad D := \begin{bmatrix} d_{1,1} & \cdots & d_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{N,1} & \cdots & d_{N,N} \end{bmatrix},$$

$$B_n := \begin{bmatrix} b_{o,n} \\ \vdots \\ b_{N-1,n} \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} b_o \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{bmatrix}, \quad H_n := \begin{bmatrix} h_n(x_1) \\ \vdots \\ h_n(x_N) \end{bmatrix}, \quad H := \begin{bmatrix} h(x_1) \\ \vdots \\ h(x_N) \end{bmatrix}.$$

Es gilt also:

(2.13) $$D_n B_n = H_n \ , \ DB = H \ .$$

Die (N-N)-Matrix $C_{i,n}$ bzw. C_i erhält man aus D_n bzw. D, indem in D_n bzw. D die i-te Spalte durch H_n bzw. H ersetzt wird, $1 \leqq i \leqq N$.
Die Gleichungssysteme (2.13) sind eindeutig lösbar, da der von $\{\Delta^i(t_o, \ldots, t_o)e^{tx} \mid o \leqq i \leqq N-1\}$ bzw.
$\{\Delta^i(t_{1,n}, \ldots, t_{i+1,n})e^{tx} \mid o \leqq i \leqq N-1\}$ erzeugte N-dimensionale reelle Vektorraum die Haarsche Bedingung erfüllt (Satz 1.1 und Hilfssatz 1.2). Damit folgt :

$$\det(D_n) \neq o \neq \det(D) \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Nach der Cramerschen Regel gilt

$$b_{i,n} = \frac{\det(C_{i+1,n})}{\det(D_n)} \ , \ n \in \mathbb{N}, \text{ und } b_i = \frac{\det(C_{i+1})}{\det(D)} \text{ für } o \leqq i < N.$$

Für (n-n)-Matrizen mit reellen Koeffizienten ist die Abbildung

$$A \longrightarrow \det(A)$$

eine stetige Funktion der n^2 Koeffizienten von A;
aus (2.11) und (2.12) erhält man daher für $o \leqq i < N$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\det(C_{i+1,n})}{\det(D_n)} = \frac{\det(C_{i+1})}{\det(D)} \ , \ n \in J.$$

Somit ist (2.1o) gezeigt.

Durch vollständige Induktion nach N ergibt sich unter Verwendung von (1.7) für $p_i, s_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqq i \leqq N$, mit $s_i \neq s_j$ für $i \neq j$:

(2.14)
$$\sum_{i=1}^{N} p_{i-1} \Delta^{i-1}(s_1, \ldots, s_i)e^{tx} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} e^{s_i x} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{N} (s_i - s_m)^{-1} \cdot \Big[p_{N-1} + \sum_{k=i}^{N-1} p_{k-1} \prod_{m=k+1}^{N} (s_i - s_m)\Big]$$

$$N=1 : \sum_{i=1}^{1} p_{i-1}\Delta^{i-1}(s_1,\dots,s_i)e^{tx} = p_o e^{s_1 x} =$$

$$= \sum_{i=1}^{1} e^{s_i x} \prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{1} (s_i-s_m)^{-1}\Big[p_{N-1}+\sum_{k=i}^{o} p_{k-1} \prod_{m=k+1}^{1} (s_i-s_m)\Big]$$

Es gelte (2.14) für $N\in\mathbb{N}$.

Induktionsschluß:

$$\sum_{i=1}^{N} p_{i-1}\Delta^{i-1}(s_1,\dots,s_i)e^{tx} + p_N\Delta^{N}(s_1,\dots,s_{N+1})e^{tx} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} e^{s_i x} \prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{N} (s_i-s_m)^{-1}\Big[p_{N-1}+\sum_{k=i}^{N-1} p_{k-1} \prod_{m=k+1}^{N} (s_i-s_m)\Big] +$$

$$+ p_N \sum_{i=1}^{N+1} e^{s_i x} \prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{N+1} (s_i-s_m)^{-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} e^{s_i x} \prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{N+1} (s_i-s_m)^{-1} \sum_{k=i}^{N} p_{k-1} \prod_{m=k+1}^{N+1} (s_i-s_m) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N+1} e^{s_i x} p_N \prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{N+1} (s_i-s_m)^{-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} e^{s_i x} \prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{N+1} (s_i-s_m)^{-1}\Big[p_N+\sum_{k=i}^{N} p_{k-1} \prod_{m=k+1}^{N+1} (s_i-s_m)\Big] .$$

Damit ist (2.14) vollständig bewiesen.

Es gilt also

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^{N} e^{t_{i,n}x} \prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{N} (t_{i,n}-t_{m,n})^{-1}\Big[b_{N-1,n}+\sum_{k=i}^{N-1} b_{k-1,n} \prod_{m=k+1}^{N} (t_{i,n}-t_{m,n})\Big]$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} t_{i,n}=t_o$ für $n\in J$, $1\leqq i\leqq N$, und (2.1o) existiert ein $n_o\in\mathbb{N}$, so daß für $n\geqq n_o$, $n\in J$, erfüllt ist:

$$\operatorname{sign}\Big(b_{N-1,n}+\sum_{k=i}^{N-1} b_{k-1,n} \prod_{m=k+1}^{N} (t_{i,n}-t_{m,n})\Big) = \operatorname{sign}(b_{N-1,n}) =$$

$= \operatorname{sign}(a_{N-1})$ für $1 \leq i \leq N$; weiter gilt für $1 \leq i \leq N$:

$$\operatorname{sign}\Big(\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{N} (t_{i,n} - t_{m,n})^{-1} \Big) = (-1)^{N-i} \quad , n \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$a_{i,n} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{N} (t_{i,n} - t_{m,n})^{-1} \Big[b_{N-1,n} + \sum_{k=i}^{N-1} b_{k-1,n} \prod_{m=k+1}^{N} (t_{i,n} - t_{m,n}) \Big]$$

erhält man $\operatorname{sign}(a_{i,n}) = (-1)^{N-i} \operatorname{sign}(a_{N-1})$ für $n \geq n_o$, $n \in J$;
die Behauptung gilt also für die Teilfolge $(h_n)_{n \in J}$.
Nimmt man an, daß die Behauptung nicht für die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt, dann gibt es eine Teilfolge $(h_n)_{n \in J_1} \subseteq (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\operatorname{sign}(h_n) \neq S$ für $n \in J_1$. Da aber $(h_n)_{n \in J_1}$ ebenfalls gegen h gleichmäßig konvergiert, liefern die soeben durchgeführten Überlegungen die Existenz einer Teilfolge in $(h_n)_{n \in J_1}$, deren Elemente den Vorzeichenvektor S besitzen, was im Widerspruch zu $\operatorname{sign}(h_n) \neq S$, $n \in J_1$ steht.
Damit ist die Behauptung gezeigt.

<u>Satz 2.7</u> (Braess, [2]; Werner, [21])
Es sei $N \in \mathbb{N}$ und S ein Vorzeichenvektor mit N Komponenten; die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V_N^o(S)$ konvergiere auf I gleichmäßig gegen $h \in V_N - V_{N-1}$.

Behauptung: $\qquad h \in V_N(S)$

Beweis:
Es sei $h_n(x) = \sum_{i=1}^{N} a_{i,n} e^{t_{i,n} x}$, $n \in \mathbb{N}$. Nach Korollar 2.3 sind die Folgen $(t_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq N$, beschränkt und o.B.d.A. gilt $\operatorname{grd}(h_n) = N$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gibt also eine Teilfolge $(h_n)_{n \in J}$ mit $J \subseteq \mathbb{N}$, so daß erfüllt ist:

$$\operatorname{grd}(h_n) = N \text{ und } (t_{i,n})_{n \in J} \text{ ist konvergent für } 1 \leq i \leq N.$$

Es wird nun die Folge $(h_n)_{n\in J}$ betrachtet, es ist also stets $n\in J$ erfüllt.
Es gebe L verschiedene Grenzwerte der Folgen $(t_{i,n})_{n\in J}$: $\lim_{n\to\infty} t_{j,n}=t_i$ für $j_i\leqq j<j_{i+1}$ mit $1\leqq i\leqq L$, wobei $j_1=1$, $j_i<j_{i+1}$ und $j_{L+1}-1=N$ sei und weiter $t_i<t_{i+1}$ gilt (Im allgemeinen ist hierzu für endlich viele Elemente der Folge die Indizierung der Summanden, wie sie durch Definition 1.2 gegeben ist, abzuändern).

Mit $h_{i,n}(x)=\sum_{j=j_i}^{j_{i+1}-1} a_{j,n}e^{t_{j,n}x}$, $1\leqq i\leqq L$, erhält man $h_n(x)=\sum_{i=1}^{L} h_{i,n}(x)$

und es gibt ein $n_o\in \mathbb{N}$ mit $S=(\text{sign}(h_{1,n}),..,\text{sign}(h_{L,n}))$ für $n\geqq n_o$.

Der Beweis von Satz 2.5 zeigt, daß $\prod_{i=1}^{L}(D-t_i)^{j_{i+1}-j_i}h=o$ und

damit $h(x)=\sum_{i=1}^{L}P_i(x)e^{t_ix}$ mit $\text{grd}(P_i)=j_{i+1}-j_i-1=:k_i$ erfüllt ist.

Mit $h_i(x)=P_i(x)e^{t_ix}$ gilt $h(x)=\sum_{i=1}^{L}h_i(x)$.

Für L=1, d.h. $\lim_{n\to\infty} t_{i,n}=t_1$ für $1\leqq i\leqq N$, liefert Hilfssatz 2.3 die Behauptung. Es gelte also $2\leqq L\leqq N$.

Es wird nun ähnlich wie in Hilfssatz 2.3 die Darstellung durch Differenzenquotienten verwendet:

$$h_{i,n}(x)=\sum_{j=o}^{k_i} b_{i,j}^{n}\Delta^j(t_{j_i,n},...,t_{j_i+j,n})e^{tx}$$

(2.15)

$$h_i(x)=\sum_{j=o}^{k_i} b_{i,j}\Delta^j(t_i,...t_i)e^{tx}$$

Es seien N Punkte x_i, $1\leqq i\leqq N$, in I gegeben mit $x_1<x_2<...<x_N$; nach Voraussetzung gilt damit für $1\leqq i\leqq N$

(2.16) $$\lim_{n\to\infty} h_n(x_i)=h(x_i) \quad .$$

Hiermit wird definiert:

$d_{j,m,i}^{n}=\Delta^{m-1}(t_{j_i,n},...,t_{j_i+m-1,n})e^{tx_j}$ und

$d_{j,m,i}=\Delta^{m-1}(t_i,...,t_i)e^{tx_j}$ für $1\leqq m\leqq k_i+1$, $1\leqq i\leqq L$, $1\leqq j\leqq N$, $n\in J$.

Weiter sei für $1 \leq i \leq L$

$$D_{i,n} = \begin{bmatrix} d^n_{1,1,i} & \cdots\cdots\cdots & d^n_{1,k_i+1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ d^n_{N,1,i} & \cdots\cdots\cdots & d^n_{N,k_i+1,i} \end{bmatrix}, \quad n \in J, \text{ und}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} d_{1,1,i} & \cdots\cdots\cdots & d_{1,k_i+1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{N,1,i} & \cdots\cdots\cdots & d_{N,k_i+1,i} \end{bmatrix}.$$

Mit den (N-N)-Matrizen $D_n=(D_{1,n},\dots,D_{L,n})$, $n \in J$, und $D=(D_1,\dots,D_L)$ gilt nach (2.15)

$$D_n \begin{bmatrix} B_{1,n} \\ \vdots \\ B_{L,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_n(x_1) \\ \vdots \\ h_n(x_N) \end{bmatrix} =: H_n \quad \text{und} \quad D \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_1) \\ \vdots \\ h(x_N) \end{bmatrix} =: H,$$

wobei für $1 \leq i \leq L$

$$B_{i,n} = \begin{bmatrix} b^n_{i,o} \\ \vdots \\ b^n_{i,k_i} \end{bmatrix} \quad \text{und } B_i = \begin{bmatrix} b_{i,o} \\ \vdots \\ b_{i,k_i} \end{bmatrix} \text{ ist.}$$

Die (N-N)-Matrizen $C_{i,n}$ und C_i, $1 \leq i \leq N$, sind definiert wie in Hilfssatz 2.3 .

Mit (2.16) und Hilfssatz 1.3 folgt wie oben aus der Cramerschen Regel

$$\lim_{n\to\infty} b^n_{i,j} = \lim_{n\to\infty} \frac{\det(C_{j_i+j,n})}{\det(D_n)} = \frac{\det(C_{j_i+j})}{\det(D)} = b_{i,j},$$

$$o \leq j \leq k_i, \; 1 \leq i \leq L, \; n \in J,$$

da die entsprechenden Gleichungssysteme wieder eindeutig lösbar sind.

Nach Hilfssatz 1.3 konvergieren daher die Folgen $(h_{i,n})_{n\in J}$ auf I gleichmäßig gegen h_i für $1\leqq i\leqq L$, und Hilfssatz 2.3 ergibt $\operatorname{sign}(h_{i,n}) = \operatorname{sign}(h_i)$, $1\leqq i\leqq L$, für $n\geqq n_o$, $n\in J$, woraus $\operatorname{sign}(h)=S$ folgt, was zu zeigen war.

Es gilt noch allgemeiner:

Korollar 2.5 (Braess, [2]; Werner, [21])

Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.7 mit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V_N(S)$ erfüllt.

Behauptung: $h \in V_N(S)$

Beweis:

Es sei $n\in\mathbb{N}$; für jedes $m\in\mathbb{N}$ existiert ein $g_{m,n}\in V_N^o$ mit $||h_n-g_{m,n}||_I \leqq \frac{1}{m}$ und nach Satz 2.7 gibt es ein $m(n)\in\mathbb{N}$ mit $\operatorname{sign}(g_{m,n})=\operatorname{sign}(h_n)$ für $m\geqq m(n)$.

Mit $m_n:=\max\{n,m(n)\}$, $n\in\mathbb{N}$, erhält man so eine Folge $(g_{m_n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $V_N^o(S)$, die gleichmäßig auf I gegen h konvergiert;

Satz 2.7 ergibt damit die Behauptung.

Es wird noch benötigt:

Satz 2.8

$(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V_N$ mit $h_n(x)=\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=o}^{k_i} a_{i,j}^n x^j e^{t_{i,n}x}$ und $L\in\mathbb{N}$

konvergiere auf I gleichmäßig gegen $h(x)=\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=o}^{k_i} a_{i,j}x^j e^{t_i x}$

und es gelte $\lim_{n\to\infty} t_{i,n} = t_i\in\mathbb{R}$ für $1\leqq i\leqq L$.

Behauptung: $\lim_{n\to\infty} a_{i,j}^n = a_{i,j}$ für $o\leqq j\leqq k_i$, $1\leqq i\leqq L$.

Beweis:

Mit $k=\sum_{i=1}^{L}(k_i+1)$ wähle man k Punkte x_i, $1\leqq i\leqq k$, mit $x_i<x_{i+1}$ in I;

es gilt

$$\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=o}^{k_i} a^n_{i,j}x_m^j e^{t_{i,n}x_m} = h_n(x_m) \quad , 1\leq m\leq k,\ n\in\mathbb{N}$$

(2.17)
$$\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=o}^{k_i} a_{i,j}x_m^j e^{t_i x_m} = h(x_m) \quad , 1\leq m\leq k.$$

Betrachtet man wieder die Koeffizienten $a^n_{i,j}$ bzw. $a_{i,j}$, als die eindeutig bestimmten Lösungen der Gleichungssysteme (2.17), dann erhält man wegen $\lim_{n\to\infty} h_n(x_j) = h(x_j)$, $1\leq j\leq k$, und $\lim_{n\to\infty} t_{i,n} = t_i$, $1\leq i\leq L$, aus der Cramerschen Regel die Behauptung des Satzes.

Einen Zusammenhang zwischen der gleichmäßigen Konvergenz auf I und der gleichmäßigen Konvergenz im Innern von I gibt der folgende Satz für Exponentialsummen an:

Satz 2.9 (Werner, [21])

Es sei $N\in\mathbb{N}$; konvergiert die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq V_N$ **gleichmäßig** im Innern von I gegen $h\in V_N-V_{N-1}$, dann konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen h .

Beweis:

Für jedes abgeschlossene Intervall $I_1=[a_1,b_1]\subseteq(a,b)$ sei $I_1'=\left[\frac{a_1+a}{2}, \frac{b_1+b}{2}\right]$; für $j\in\mathbb{N}$ gibt es nach Satz 2.2 ein $K(j,I_1',I_1)<\infty$ mit $||D^j(h_n-h)||_{I_1}\leq K(j,I_1',I_1)||h-h_n||_{I_1'}$.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz im Innern von I folgt daher

für $j\in\mathbb{N}$: $\qquad \lim_{n\to\infty} ||D^jh_n-D^jh||_{I_1} = o$

Für $x_o\in(a,b)$ gilt daher

(2.17) $\qquad \lim_{n\to\infty} D^jh_n(x_o) = D^jh(x_o) \qquad j\in\mathbb{N}$

Wegen $h\in V_N-V_{N-1}$ erhält man mit dem Beweis von Satz 2.5, daß die Frequenzen der Elemente von $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind:

Es gilt also

$$\prod_{i=1}^{N}(D-t_{i,n})h_n=o \text{ mit } |t_{i,n}|<T<\infty \text{ für } 1\leq i\leq N \text{ und } n\in\mathbb{N}$$

und es gibt daher eine Teilfolge mit $\lim_{n\to\infty} t_{i,n} = t_i\in\mathbb{R}$, $n\in J\subseteq\mathbb{N}$.

Mit (2.17) ergibt der Satz von der stetigen Abhängigkeit der Lösungen eines Anfangswertproblems gewöhnlicher Differentialgleichungen die gleichmäßige Konvergenz von $(h_n)_{n \in I}$ auf I; da somit in jeder Teilfolge von $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine auf I gleichmäßig gegen h konvergente Teilfolge existiert, gilt die Behauptung.

Bemerkung 2.2

Entscheidend für den Beweis von Satz 2.9 ist die Beschränktheit der Folgen $(t_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$; man beachte hierzu Beispiel 2.1. Setzt man dies voraus, dann wird die Voraussetzung $h \in V_N - V_{N-1}$ nicht benötigt.