I. THEORIE DER EXPONENTIALAPPROXIMATION

§1 Einleitung, Hilfsmittel

1.1 Die Mengen V_N, V_N^o, V_N^+

Es sei X stets eine kompakte Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und C(X) die Menge der auf X stetigen, reellen Funktionen; C(X) sei mit der von der Tschebyscheff-Norm $||.||_X$ induzierten Metrik versehen:

$$||f||_X = \sup_{x\in X}|f(x)| \quad , \; f\in C(X)$$

In $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, wird die Euklidische Metrik bzw. Norm verwendet. I bezeichnet stets ein abgeschlossenes, reelles Intervall $[a,b]$ mit $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

In dieser Arbeit wird die Tschebyscheff-Approximation stetiger, reeller Funktionen durch Exponentialsummen - ein nichtlineares Approximationsproblem - behandelt; wie üblich sei also definiert:

<u>Definition 1.1</u>

Es sei $V \subseteq C(X)$.

a. $v_o \in V$ heißt beste Approximation an $f\in C(X)$ bezüglich V auf X oder auch Minimallösung für f bezüglich V auf X, wenn gilt:
$$||f-v_o||_X = \inf_{v\in V}||f-v||_X = R(f)$$

b. R(f) ist die Minimalabweichung von f bzgl. V auf X.

c. Die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ ist eine Minimalfolge in V für f auf X, wenn gilt:
$$\lim_{n\to\infty}||f-v_n||_X = R(f) \; .$$

Wenn man von Exponentialsummen spricht, denkt man zunächst an Summen $\sum_{i=1}^{n} a_i e^{t_i x}$ mit $a_i,t_i\in\mathbb{R}$ für $1\leq i\leq n$, $n\in\mathbb{N}$.

Dies soll im folgenden präzisiert werden.

Definition 1.2

Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $a=(a_1,\dots,a_N,t_1,\dots,t_N) \in \mathbb{R}^{2N}$.

a. $$E(a,x) := \sum_{i=1}^{N} a_i e^{t_i x} , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die hiermit auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion wird mit $E(a)$ bezeichnet; $a \in \mathbb{R}^{2N}$ ist der Parametervektor von $E(a)$.

b.
$$V_N^o := \{E(a) \mid a=(a_1,\dots,a_N,t_1,\dots,t_N) \in \mathbb{R}^{2N},$$
$$t_i < t_{i+1} \text{ für } 1 \leqq i \leqq N-1,\ a_i = o \Rightarrow a_{i+1} = o\}$$

V_o^o enthält nur die Nullfunktion.

c. Die Länge von $E(a,x) = \sum_{i=1}^{L} a_i e^{t_i x} \in V_N^o$ ist L,

wenn $a_i \neq o$ für $1 \leqq i \leqq L$ erfüllt ist.

Bemerkung:

Jede Funktion $\sum_{i=1}^{N} a_i e^{t_i x}$ mit $a_i, t_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqq i \leqq N$ ist in V_N^o enthalten; $E(a) \in V_N^o$ bedeutet nur, daß die Indizierung der Summanden gemäß Definition 1.2b durchgeführt wird. Dies ist offensichtlich stets möglich und man sieht unmittelbar ein, daß $E(a) \in V_N^o$ mit der Länge $L<N$ keinen eindeutig bestimmten Parametervektor $a \in \mathbb{R}^{2N}$ besitzt, da zum Beispiel $t_{L+1} \in \mathbb{R}$ mit $t_{L+1} > t_L$ beliebig gewählt werden kann.

Die Existenz einer besten Approximation bzgl. V_N^o ist allgemein nicht gesichert:

Beispiel 1.1 (Meinardus, [12])

Es sei $X=[o,1]$, $f(x)=xe^x$ und für $m \in \mathbb{N}$ sei $E(a_m) \in V_2^o$ gegeben durch $E(a_m,x) = me^{(1+\frac{1}{m})x} - me^x$. Für $x \in X$ gilt:

$$|f(x)-E(a_m,x)| = e^x|x-me^{\frac{x}{m}}+m| = e^x|m\sum_{i=2}^{\infty}\frac{x^i}{i!m^i}| \leqq$$
$$\leqq e^x m^{-1} e^x \leqq m^{-1} e^2 .$$

Es folgt also $\lim_{m\to\infty} ||f-E(a_m)||_X = o$. Die Minimalabweichung von f bzgl. V_2^o ist demnach Null, f ist jedoch nicht in V_2^o enthalten. Damit gibt es keine beste Approximation für f bezüglich V_2^o auf X.

Anders formuliert besagt Beispiel 1.1, daß jede Umgebung von $f(x)=xe^x$ in $C([o,1])$ eine Funktion aus V_2^o enthält.
Dies ergibt sich auch unmittelbar aus der Tatsache, daß die betrachteten Funktionen Lösungen homogener, linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind.
Allgemein für $N\in\mathbb{N}$ entnimmt man der Theorie der linearen Differentialgleichungen N-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (man vergleiche hierzu [5], [7]):
1. Die Lösungen h der Differentialgleichungen

$$\text{(1.1)} \qquad \sum_{i=o}^{N} d_i D^i h = \prod_{i=1}^{L} (D-t_i)^{m_i+1} h = o$$
$$\text{mit} \quad t_i \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leqq i \leqq L \text{ und } \sum_{i=1}^{L} (m_i+1) = N$$

sind von der Gestalt $h(x) = \sum_{i=1}^{L} P_i(x)e^{t_i x}$ mit reellen Polynomen $P_i(x) = \sum_{n=o}^{m_i} a_{i,n}x^n$ für $1 \leqq i \leqq L$.

Liegt ein Anfangswertproblem vor, so sind die Lösungen von (1.1) eindeutig bestimmt.
(Wie üblich wird der Differentialoperator $\frac{d}{dx}$ mit D bezeichnet. Es ist $D^o f=f$ und $D^n=D^{n-1}D$)
2. Die Lösung der Differentialgleichung (1.1) mit den Anfangswerten $D^i h(x_o)=h_i \in \mathbb{R}$, $o\leqq i\leqq N-1$, hängt stetig von den Koeffizienten d_i und den Anfangswerten ab. Dies ergibt sich aus dem entsprechenden Satz für Differentialgleichungssysteme.
Hat man also eine Funktion $h(x) = \sum_{i=1}^{L} (\sum_{n=o}^{m_i} a_{i,n}x^n)e^{t_i x}$ mit $m_i \geqq 1$ für ein i und $\sum_{i=1}^{L} (m_i+1)=N$ gegeben, so ist

(1.2) $$\sum_{i=o}^{N} d_i D^i h := \prod_{i=1}^{L} (D-t_i)^{m_i+1} h = o \quad \text{erfüllt.}$$

Die Differentialgleichung $\sum_{i=o}^{N} c_i D^i g := \prod_{i=1}^{N} (D-s_i) g$ mit

$|t_i - s_i| < \varepsilon$ für $1 \leqq i \leqq N$, $s_i \neq s_j$ für $i \neq j$, besitzt Lösungen der Form $g(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i e^{s_i x}$. Legt man ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und die Anfangswerte

$$D^i g(x_o) = D^i h(x_o) \qquad o \leqq i \leqq N-1, \; x_o \in I,$$

zugrunde, dann kann $||h-g||_I$ bei geeigneter Wahl von ε beliebig klein gemacht werden, da $\lim_{\varepsilon \to o} c_i = d_i$, $o \leqq i \leqq N-1$, gilt.

Damit ist gezeigt:

(1.3) In jeder Umgebung von $\sum_{i=1}^{L} P_i(x) e^{t_i x}$ in $C(I)$ mit $\sum_{i=1}^{L} (\mathrm{grd}(P_i)+1) = N$ liegt ein Element von V_N^o.

Hierbei wird der Grad des Polynoms $P(x) = \sum_{i=o}^{m} a_i x^i$ mit $\mathrm{grd}(P)$ bezeichnet; mit $a_m \neq o$ gilt also $\mathrm{grd}(P) = m$.

Das Nullpolynom $P(x) \equiv o$ habe den Grad -1.

Will man bei der Approximation stetiger Funktionen durch Exponentialsummen die Existenz einer besten Approximation sichern, so muß man also V_N^o mindestens um die in (1.3) betrachteten, verallgemeinerten Exponentialsummen erweitern.

<u>Definition 1.3</u>

a. $V_N := \{E(a) \mid E(a,x) = \sum_{i=1}^{L} P_i(x) e^{t_i x}$, P_i ist ein reelles Polynom

mit $\mathrm{grd}(P_i) = m_i$, $\sum_{i=1}^{L} (m_i+1) \leqq N$,

$t_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqq i \leqq L$ mit $t_i < t_{i+1}\}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{o\}$.

b. Für $E(a,x) = \sum_{i=1}^{L} P_i(x) e^{t_i x} \in V_N$ werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

Es sei $grd(E(a)) := \sum_{i=1}^{L} (grd(P_i)+1)$ der Grad von $E(a)$;

ist $grd(P_i) \geqq o$ für $1 \leqq i \leqq L$ erfüllt, dann ist L die Länge von $E(a)$.

Das Spektrum von $E(a)$ ist gegeben durch $\{t_i \mid 1 \leqq i \leqq L\}$, die Elemente dieser Menge seien die Frequenzen von $E(a)$.

Bemerkung 1.1

1. Es ist nicht ohne weiteres möglich, den Elementen von V_N einen Parametervektor zuzuordnen, wie dies in Definition 1.1 für V_N^o geschah. Dies wird deutlich, wenn man bedenkt, daß neben $\sum_{i=o}^{N-1} a_{i+1} x^i e^{t_1 x}$ mit $a_N \neq o$ auch $\sum_{i=1}^{N} a_i e^{t_i x} \in V_N^o$ in V_N enthalten ist; im ersten Fall bestimmen N+1, im zweiten Fall 2N Parameter die Funktion.
   Auch die Beschränkung auf Elemente von V_N mit einer festen Anzahl von Parametern bringt keine Änderung:
   Es seien $a,b,c,u,v \in \mathbb{R}$ mit $u<v$ gegeben. Mit (a,b,c,u,v) als Parametervektor lassen sich die Exponentialsummen
   $$ae^{ux}+(b+cx)e^{vx} \in V_3 \quad , \quad (a+bx)e^{ux}+ce^{vx} \in V_3$$
   bilden, die im Spektrum übereinstimmen, im allgemeinen jedoch nicht gleich sind.
   Für $E(a) \in V_N - V_N^o$ hat also a nicht die gleiche Bedeutung wie für die Elemente von V_N^o; es dient hier nur der Bezeichnung einer speziellen Funktion im Sinne einer Indizierung.
2. Für $E(a) \in V_N^o$ fällt die Länge mit dem Grad zusammen.
   Hat $E(a) \in V_N - V_N^o$ die Länge L, so folgt $L < grd(E(a))$ für $N \geqq 2$.
3. Aus der Definition der Polynomgrade ergibt sich, daß V_o nur die Nullfunktion enthält.

In §2 wird gezeigt, daß auch bei der Approximation bzgl. der in Definition 1.4 beschriebenen Teilmengen von V_N^o eine Minimallösung für $f \in C(I)$ existiert:

Definition 1.4

$$V_N^+ := \{E(a) \mid E(a,x) = \sum_{i=1}^{N} a_i e^{t_i x} \in V_N^o,\ a_i \geq o \text{ für } 1 \leq i \leq N\}$$

$$V_N^- := \{E(a) \mid -E(a) \in V_N^+\}$$

Bemerkung 1.2 (Werner, [21])

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $E \in V_N$ n-fach differenzierbar in $\mathbb{R}$ und es gilt:

$$D^n E \in V_N$$

Beweis: vollständige Induktion nach n:

$E(x) = \sum_{i=1}^{L} P_i(x) e^{t_i x} \in V_N$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar:

$$DE(x) = \sum_{i=1}^{L} (DP_i(x) + P_i(x) t_i) e^{t_i x}.$$

Wegen $\mathrm{grd}(DP_i + t_i P_i) \leq \mathrm{grd}(P_i)$ ist $DE \in V_N$ erfüllt.

Gilt die Behauptung für n, also $z = D^n h \in V_N$, dann ist z in $\mathbb{R}$ differenzierbar und es ist $Dz = D^{n+1} h \in V_N$. Damit ist die Behauptung vollständig gezeigt.

Von entscheidender Bedeutung ist der nun folgende Satz über die Nullstellen von Exponentialsummen:

Satz 1.1 (Meinardus, [12])

Jede nicht identisch verschwindende Funktion in V_N besitzt höchstens N-1 reelle Nullstellen.

Beweis: Durch vollständige Induktion nach L wird gezeigt:

$E(x) = \sum_{i=1}^{L} P_i(x) e^{t_i x} \in V_N$ mit $E \not\equiv o$ hat höchstens

(1.4) $\quad \sum_{i=1}^{L} (\mathrm{grd}(P_i) + 1) - 1$ reelle Nullstellen.

Beweis:
Für L=1 ist nichts zu zeigen: $P(x)e^{tx} \in V_N$ besitzt höchstens $grd(P)$ reelle Nullstellen oder verschwindet identisch.
Es gelte (1.4) für L-1.

$E(x)=\sum_{i=1}^{L} P_i(x)e^{t_i x} \in V_N$ habe M reelle Nullstellen und es sei $m_L=grd(P_L)\geqq o$ (sonst gilt die Behauptung nach Induktionsannahme).

$$E_1(x):=D^{m_L+1}(e^{-t_L x}E(x)) = D^{m_L+1}\left(\sum_{i=1}^{L-1} P_i(x)e^{(t_i-t_L)x}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{L-1} Q_i(x)e^{(t_i-t_L)x}$$

Nach Bemerkung 1.2 gilt $\sum_{i=1}^{L-1}(grd(Q_i)+1) \leqq \sum_{i=1}^{L-1}(grd(P_i)+1)$.

Die Funktion $e^{-t_L x}E(x)$ besitzt M reelle Nullstellen; nach dem Satz von Rolle hat dann E_1 mindestens $M-(m_L+1)$ reelle Nullstellen. Die Induktionsannahme, auf E_1 angewandt, ergibt $M-m_L-1\leqq \sum_{i=1}^{L-1}(grd(P_i)+1)-1 = \sum_{i=1}^{L}(grd(P_i)+1)-1-m_L-1$,

woraus $M\leqq \sum_{i=1}^{L}(grd(P_i)+1)-1$ folgt.

Damit ist (1.4) vollständig bewiesen und die Behauptung des Satzes gilt.

Die Theorie der nichtlinearen Approximation, wie sie in [11] dargestellt ist, wird in §3 zur Herleitung von Charakterisierungs- und Eindeutigkeitssätzen für die Approximation bzgl. V_N herangezogen; die Theorie von Rice, [15], ist hier nicht anwendbar, da V_N im allgemeinen die Varisolvency-Eigenschaft nicht besitzt. Braess gibt dazu in [1] folgendes Beispiel an:

Beispiel 1.2

Betrachtet wird V_2 im Intervall $[-3,3]$.
In V_2 besitzt $E_o(x)=x \in V_2$ die Varisolvency-Eigenschaft nicht:

a. Es sei

$x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=2$ und
$y_1=-2+\delta$, $y_2=-1$, $y_3=1$, $y_4=2-\delta$ mit $\delta>o$ gegeben.
Es kann o.B.d.A. $\delta<1$ angenommen werden.
Gesucht sind die Funktionen $E \in V_2$, die

(1.5) $$E(x_i)=y_i \quad \text{für } 1\leqq i\leqq 4$$

erfüllen.
Gilt $E_1(x_i)=E_2(x_i)=y_i$, $1\leqq i\leqq 4$, für $E_1,E_2 \in V_2$, so folgt $E_1=E_2$ nach Satz 1.1 . Für jede Lösung E des Problems (1.5) gilt $E(x_i)=-E(-x_i)$, $1\leqq i\leqq 4$, und man erhält

(1.6) $$E(x)=-E(-x) \quad x \in I.$$

Die Funktionen in V_2^o und $V_2-V_2^o$, die (1.6) erfüllen, sind gegeben durch $E(x)=a(e^{sx}-e^{-sx})$ und $E(x)=ax$ mit $a,s\in \mathbb{R}$.
Gilt weiter $E(x)\geqq o$ für $x\geqq o$, dann sind diese Funktionen in $[o,3]$ konvex und lösen daher für kein $\delta>o$ das Problem (1.5).

b. Mit $E(x)=\frac{1}{4}(e^x-e^{-x}) \in V_2$ besitzt E_o-E in I drei Nullstellen:

x	-3	-1	o	+1	+3
$E_o(x)-E(x)$	+2.oo9	-o.412	o.o	+o.412	-2.oo9

Nach a. ist also der Solvency-Grad von E_o in V_2 kleiner als 4, es gibt aber Elemente $E \in V_2$, so daß E_o-E in I 4-1 Nullstellen hat; damit ist für E_o die Varisolvency-Eigenschaft, wie sie in [15] definiert ist, nicht erfüllt.

Bemerkung: In "On Extended Varisolvent Families" zeigen R. B. Barrar und H. L. Loeb, daß die reellen Funktionen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{C(z)}{A(z)}e^{zx}dz \quad , x\in \mathbb{R},$$

ein Funktionensystem bilden, das die Varisolvency-Eigenschaft besitzt; hierbei gilt

1. C(z) und A(z) sind Polynome mit reellen Koeffizienten, die keine Nullstelle gemeinsam haben; es sei $grd(C)<grd(A)=n\leqq N\in \mathbb{N}$

und der Koeffizient bei z^n in A ist Eins.

2. Für den Imaginärteil jeder Nullstelle z_o von A gilt:

$$|\mathrm{Im}(z_o)| < \tau$$

3. Der geschlossene Weg K sei der Rand eines Gebietes in $\mathbb{C}$, das alle Nullstellen von A im Innern enthält.

Jedes Element E von V_n^o ist in dem beschriebenen Funktionensystem enthalten: Man hat hierzu das Polynom A so zu wählen, daß die n Frequenzen von E die (reellen) Nullstellen von A sind; dann kann das Polynom C so bestimmt werden, daß man (mit dem Cauchyschen Integralsatz) die restlichen Parameter von E erhält.

1.2 Darstellung der Exponentialsummen durch Differenzenquotienten

Die Darstellung von Funktionen aus V_N gemäß Definition 1.3 ist für topologische Untersuchungen oft nicht sehr geeignet, was auch Beispiel 1.1 zeigt. Deshalb wird nun durch Verwendung von Differenzenquotienten eine andere Darstellung für die Elemente von V_N entwickelt, die für Konvergenzbetrachtungen günstiger ist.

Definition 1.5

Die Funktion f sei auf $T:=\{t_i \mid t_i \in \mathbb{P},\ i \in \mathbb{N},\ t_i \neq t_j \text{ für } i \neq j\}$ definiert.

$$\Delta^{o}(t_1)f := f(t_1)$$

$$\Delta^{n}(t_1,\dots,t_{n+1})f := \frac{\Delta^{n-1}(t_1,\dots t_n)f - \Delta^{n-1}(t_2,\dots,t_{n+1})f}{t_1 - t_{n+1}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Es werden die folgenden Eigenschaften der Differenzenquotienten benötigt (man vergleiche hierzu [19], [22], [23]):

1. Mit $P_j(t) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} (t-t_i)$, $1 \leq j \leq n+1$, gilt

$$\Delta^{n}(t_1,\dots,t_{n+1})f = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f(t_j)}{P_j(t_j)} \tag{1.7}$$

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und f eine Funktion von t in I.

2. Für $f \in C^n(I)$, d.h. f ist in I n-mal stetig differenzierbar, gilt mit $\{t_i \mid 1 \leq i \leq n+1\} \subseteq I$:

$$\begin{aligned}&\Delta^{n}(t_1,\dots,t_{n+1})f=\\ &= \int_0^1 \int_0^{s_1} \dots\dots \int_0^{s_{n-1}} \frac{d^n}{dt^n} f\Big(t_1 + \sum_{i=1}^{n} (t_{i+1}-t_i)s_i\Big)ds_n \dots\dots ds_1\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\Delta^{n}(t_1,\dots,t_{n+1})f = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n} f(\tau) \qquad \text{für ein } \tau \in I. \tag{1.9}$$

$$\Delta^{n}(t_1,\dots,t_1)f = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n} f(t_1) \tag{1.1o}$$

Die Gleichung (1.8) ermöglicht für $f \in C^n(I)$ folgende Verallgemeinerung:

Definition 1.6

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(I)$ und $\{t_i \mid 1 \leq i \leq n+1\} \subseteq I$.

$$\Delta^m(t_1,\ldots,t_{m+1})f := \int_0^1 \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{m-1}} \frac{d^m}{dt^m} f\Big(t_1 + \sum_{i=1}^{m} (t_{i+1}-t_i)s_i\Big) ds_m \ldots ds_1$$

mit $m \leq n$.

3. Nach (1.8) sind die Definitionen 1.5 und 1.6 äquivalent, falls $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$ gilt.

   Für $t_1 \neq t_{n+1}$ folgt auch für die Differenzenquotienten nach Definition 1.6:

$$\Delta^n(t_1,\ldots,t_{n+1})f = \frac{\Delta^{n-1}(t_1,\ldots,t_n)f - \Delta^{n-1}(t_2,\ldots,t_{n+1})f}{t_1 - t_{n+1}}, \quad f \in C^n(I)$$

Bei der Anwendung der Differenzenquotienten auf e^{tx}, $x \in \mathbb{R}$, wird t als Variable betrachtet; die Differenzierbarkeitsbedingungen sind hier erfüllt und die Gleichungen (1.8), (1.9) und (1.10) sind unmittelbar anzuwenden; insbesondere hat man also:

$$\text{(1.11)} \quad \Delta^n(t_1,\ldots,t_{n+1})e^{tx} = x^n \int_0^1 \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} e^{\left(t_1 + \sum_{i=1}^{n} (t_{i+1}-t_i)s_i\right)x} ds_n \ldots ds_1$$

Vereinbarung: Da die Differenzenquotienten unabhängig von der Anordnung der Argumente t_i sind, seien diese o.B.d.A. stets der Größe nach geordnet: $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \ldots$.

Hilfssatz 1.1 (Braess, [2])

Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $t_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq N$ mit $t_i \leq t_{i+1}$ gegeben.

Behauptung:

$$\Delta^{N-1}(t_1,\ldots,t_N)e^{tx} = \sum_{i=1}^{L} P_i(x) e^{T_i x} \in V_N;$$

dabei gilt: $T_j \in S := \{t_i \mid 1 \leq i \leq N\}$ für $1 \leq j \leq L$ und für jedes Element $t \in S$ gibt es ein j mit $1 \leq j \leq L$, so daß $t = T_j$ erfüllt ist; L ist also die Zahl der verschiedenen Elemente von S.

Ferner gilt:

Der Grad von P_i ist kleiner als die Zahl der Elemente von S, die gleich T_i sind.

Beweis: Vollständige Induktion nach N:

N=1: $\Delta^o(t_1)e^{tx}=e^{t_1x}$. Die Behauptung gilt hier offensichtlich; sie sei auch für N-1 gezeigt.

Induktionsschluß:

1.Fall : $t_1=t_N$

Aus (1.1o) folgt $\Delta^{N-1}(t_1,\ldots,t_N)e^{tx}=\frac{1}{(N-1)!}\,x^{N-1}e^{t_1x}$

2. Fall: $t_1\neq t_N$

Es wird hier

$$\Delta^{N-1}(t_1,\ldots,t_N)e^{tx}=\frac{\Delta^{N-2}(t_1,\ldots,t_{N-1})e^{tx}-\Delta^{N-2}(t_2,\ldots,t_N)e^{tx}}{t_1-t_N}$$

benutzt.

Aus $t_1\neq t_N$ folgt für $1\leqq i\leqq N$: Gibt es m_i Komponenten in $(t_1,\ldots,t_N)$ mit dem Wert t_i, dann gilt dies mindestens für eines der (N-1)-Tupel $(t_1,\ldots,t_{N-1})$ und $(t_2,\ldots,t_N)$.

Mit der Induktionsannahme ergibt sich damit die Behauptung, da für Polynome Q_1,Q_2 der Differenz auf der rechten Seite die Beziehung $\mathrm{grd}(Q_1+Q_2)\leqq\max\{\mathrm{grd}(Q_1),\ \mathrm{grd}(Q_2)\}$ gilt.

Die Behauptung ist somit vollständig bewiesen.

<u>Hilfssatz 1.2</u> (Braess, [2])

Für $N\in\mathbb{N}$ und mit $t_i\in\mathbb{R}$ für $1\leqq i\leqq N$ ist die Menge

$$B=\{\Delta^i(t_1,\ldots,t_{i+1})e^{tx}\,|\,o\leqq i\leqq N-1\}$$

linear unabhängig.

Beweis: Nach Hilfssatz 1.1 ist die Behauptung gezeigt, wenn die Wronski-Determinante der Elemente von B für x=o von Null verschieden ist (vgl. [5], [7]).

Für $o\leqq m<n$ gilt wegen (1.11):

$$D^m\Delta^n(t_1,\ldots,t_{n+1})e^{tx}=x^{n-m}R_{mn}(x),\quad n\leqq N-1,$$

wobei $R_{mn}(x)$ bis auf den Faktor x^{n-m} die Summe darstellt, die durch m-fache Anwendung der Produktregel entsteht.

Für $o \leqq m = n \leqq N-1$ erhält man

$$D^m \Delta^n (t_1, \ldots, t_{n+1}) e^{tx} = n! \int_o^1 \int_o^{s_1} \ldots \int_o^{s_{n-1}} e^{(t_1 + \sum_{i=1}^{n} (t_{i+1} - t_i) s_i) x} ds_n \ldots ds_1 +$$

$+ x R_{mm}(x)$; $R_{mm}(x)$ stellt bis auf den Faktor x den Rest der bei der Differentiation entstehenden Summe dar.

Für x=o folgt:

$$D^m \Delta^n (t_1, \ldots, t_{n+1}) e^{tx} = \begin{cases} o & : \ o \leqq m < n \\ 1 & : \ o \leqq m = n \end{cases} \qquad n \leqq N-1$$

Setzt man für x=o

$$a_{ij} := D^i \Delta^j (t_1, \ldots, t_{j+1}) e^{tx} \quad , o \leqq i, j \leqq N-1,$$

so erhält man eine nichtsinguläre Dreiecksmatrix $(a_{i,j})_{o \leqq i, j \leqq N-1}$, womit die lineare Unabhängigkeit von B bewiesen ist.

Satz 1.2 (Braess, [2])

$E(x) = \sum_{i=1}^{L} P_i(x) e^{T_i x} \in V_N - V_{N-1}$ besitzt eine eindeutige Darstellung durch Differenzenquotienten: $E(x) = \sum_{i=o}^{N-1} b_i \Delta^i (t_1, \ldots, t_{i+1}) e^{tx}$.

Die Koeffizienten $b_i \in \mathbb{R}$ sind für $o \leqq i \leqq N-1$ eindeutig bestimmt; es gilt $t_j = T_i$ für $\sum_{k=1}^{i-1} (\mathrm{grd}(P_k)+1) < j \leqq \sum_{k=1}^{i} (\mathrm{grd}(P_k)+1)$ und $1 \leqq i \leqq L$; dabei sei $L \in \mathbb{N}$ die Länge von E .

Beweis:

Die Menge $U_1 = \{ \sum_{i=1}^{L} Q_i(x) e^{T_i x} \mid Q_i$ ist ein reelles Polynom mit $\mathrm{grd}(Q_i) \leqq \mathrm{grd}(P_i)$ für $1 \leqq i \leqq L \} \subseteq V_N$

stellt nach [5], [7] und der Definition von V_N einen N-dimensionalen Vektorraum dar. Nach Hilfssatz 1.2 ist $\{ \Delta^i (t_1, \ldots, t_{i+1}) e^{tx} \mid o \leqq i \leqq N-1 \}$ Basis eines N-dimensionalen, reellen Vektorraums U_2 mit $U_2 \subseteq U_1$ nach Hilfssatz 1.1 , falls für die t_i die Beziehung der Behauptung gilt.

Daraus folgt $U_1 = U_2$ und damit der erste Teil der Behauptung. Nach Hilfssatz 1.1 und Satz 1.1 sind auch die t_i für $1 \leqq i \leqq N$ eindeutig bestimmt. Damit ist der Satz gezeigt.

Bemerkung:
Es ist also möglich, jedem Element von $V_N - V_{N-1}$ die 2N Parameter $b_o,\dots,b_{N-1},t_1,\dots t_N$ gemäß Satz 1.2 zuzuordnen; verwendet man im Beispiel 1.1 die Darstellung durch Differenzenquotienten, so erhält man:

$$\begin{aligned} E(a_m,x) &= me^{(1+\frac{1}{m})x} - me^x &&= o\cdot\Delta^o(1)e^{tx} + 1\cdot\Delta^1(1,1+\tfrac{1}{m})e^{tx} \\ f(x) &= xe^x &&= o\cdot\Delta^o(1)e^{tx} + 1\cdot\Delta^1(1,1)e^{tx} \end{aligned}$$

Damit ist $E(a_m)$ der Parametervektor $(o,1,1,1+\frac{1}{m})\in\mathbb{R}^4$, $m\in\mathbb{N}$, und f der Parametervektor $(o,1,1,1)\in\mathbb{R}^4$ zugeordnet; die Konvergenz der Folge ist hier an den Parametern zu erkennen.

Es wird hierzu später benötigt:

<u>Hilfssatz 1.3</u>
Mit $n\in\mathbb{N}$ seien in $\mathbb{R}$ die Folgen $(t_{j,m})_{m\in\mathbb{N}}$, $1\leqq j\leqq n+1$, mit $t_{j,m}<t_{j+1,m}$ und $\lim\limits_{m\to\infty} t_{j,m} = t_j\in\mathbb{R}$, $1\leqq j\leqq n+1$, gegeben; weiter sei entweder $t_j<t_{j+1}$, $1\leqq j\leqq n$, oder $t_j=t$, $1\leqq j\leqq n+1$, erfüllt. Dann konvergiert die Folge $(\Delta^n(t_{1,m},\dots,t_{n+1,m})e^{tx})_{m\in\mathbb{N}}$ auf $I=[a,b]$ gleichmäßig gegen $\Delta^n(t_1,\dots,t_{n+1})e^{tx}$.

Beweis (nach [13]):
Die Funktion f sei holomorph in $\mathbb{C}$.

Für $s_j\in\mathbb{R}$, $1\leqq j\leqq n$, mit $s_j<s_{j+1}$, $1\leqq j\leqq n-1$, oder $s_j=s$, $1\leqq j\leqq n$, wird durch vollständige Induktion nach n gezeigt:

$$\Delta^{n-1}(s_1,\dots s_n)f = \frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)\prod_{j=1}^{n}(z-s_j)^{-1}dz\,, \tag{1.12}$$

wobei $K=\{z\in\mathbb{C}\,|\,R=|z|\}$ mit $\max\limits_{1\leqq j\leqq n}|s_j|<R<\infty$ sei.

n=1: $\Delta^o(s_1)f = f(s_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)(z-s_1)^{-1}dz$.

Gilt (1.12) für n, dann folgt:

Für $s_1\neq s_{n+1}$ erhält man

$$\Delta^n(s_1,\dots,s_{n+1})f = \frac{\Delta^{n-1}(s_1,\dots,s_n)f - \Delta^{n-1}(s_2,\dots,s_{n+1})f}{s_1 - s_{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{s_1 - s_{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_K [f(z)(z-s_{n+1}) - f(z)(z-s_1)] \prod_{j=1}^{n+1} (z-s_j)^{-1} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_K f(z) \prod_{j=1}^{n+1} (z-s_j)^{-1} dz$$

Aus (1.1o) und dem Cauchyschen Integralsatz für Ableitungen folgt für $s_j = s$, $1 \leqq j \leqq n+1$, unmittelbar

$$\Delta^n(s,\ldots,s) f = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(z) \prod_{j=1}^{n+1} (z-s_j)^{-1} dz$$

Damit ist (1.12) vollständig gezeigt.

Es sei nun $\max\{\max_{1 \leqq i \leqq n+1} |t_i|, 1\} < R < \infty$.

Es kann o.B.d.A. $|t_{j,m}| < \frac{3}{2} R$ für $1 \leqq j \leqq n+1$ und $m \in \mathbb{N}$ angenommen werden.

Für $x \in I$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 2R$ erhält man:

$$|e^{zx} \prod_{j=1}^{n+1} (z-t_j)^{-1} - e^{zx} \prod_{j=1}^{n+1} (z-t_{j,m})^{-1}| =$$

$$= |e^{zx}| \, |\prod_{j=1}^{n+1} (z-t_{j,m}) - \prod_{j=1}^{n+1} (z-t_j)| \prod_{j=1}^{n+1} (|z-t_j| |z-t_{j,m}|)^{-1} \leqq$$

$$\leqq e^{2R(|a|+|b|)} (R \tfrac{R}{2})^{-n-1} |\sum_{j=o}^{n} z^j (S_{j,m} - S_j)| \leqq$$

$$\leqq e^{2R(|a|+|b|)} (R \tfrac{R}{2})^{-n-1} (2R)^{n+1} \sum_{j=o}^{n} |S_{j,m} - S_j| =: M \sum_{j=o}^{n} |S_{j,m} - S_j|;$$

dabei sind S_j bzw. $S_{j,m}$ die elementarsymmetrischen Funktionen von t_k, $1 \leqq k \leqq n+1$, bzw. $t_{k,m}$, $1 \leqq k \leqq n+1$. Mit den Ergebnissen von oben erhält man für alle $x \in I$

$$|\Delta^n(t_1,\ldots,t_{n+1}) e^{tx} - \Delta^n(t_{1,m},\ldots,t_{n+1,m}) e^{tx}| \leqq$$

$\leqq \frac{1}{2\pi} 4R\pi M \sum_{j=o}^{n} |S_{j,m} - S_j|$. Wegen $\lim_{m\to\infty} \sum_{j=o}^{n} |S_{j,m} - S_j| = o$ folgt damit die Behauptung.

1.3 Vorzeichenklassen in V_N

Ein weiteres Hilfsmittel zur Beschreibung der Struktur von V_N, soweit dies hier erforderlich ist, liefert die Einführung von Vorzeichenklassen in V_N nach Braess,[2].

Da, wie in 1.1 angekündigt, die Existenz einer besten Approximation einmal durch Erweiterung von V_N^o und zum anderen durch Beschränkung auf geeignete Teilmengen, zum Beispiel V_N^+ oder V_N^-, gesichert werden kann, liegt es nahe, die Vorzeichen der Summanden in Exponentialsummen zu untersuchen.
Jeder Exponentialsumme wird rekursiv ein Vorzeichenvektor zugeordnet:

<u>Definition 1.6</u>

a. $E(x) = (\sum_{i=o}^{n} a_i x^i) e^{tx}$ mit $a_n \neq o$ und $s = \operatorname{sign}(a_n)$ hat den Vorzeichenvektor sign(E) mit n+1 Komponenten:

$$\operatorname{sign}(E) = ((-1)^n s, \ldots, (-1)^1 s, s)$$

Dabei ist für $a \in \mathbb{R}$ $\operatorname{sign}(a) = \begin{cases} 1 & \text{für } a>o \\ o & \text{für } a=o \\ -1 & \text{für } a<o \end{cases}$.

b. Für $E_1, E_2 \in V_N$ seien die Frequenzen von E_1 kleiner als die von E_2; $\operatorname{sign}(E_j)$ habe m_j Komponenten, j=1,2.
Dann hat E_1+E_2 den Vorzeichenvektor $\operatorname{sign}(E_1+E_2)$ mit m_1+m_2 Komponenten; dabei sind die ersten m_1 Komponenten die von $\operatorname{sign}(E_1)$, die restlichen m_2 die von $\operatorname{sign}(E_2)$:

$$\operatorname{sign}(E_1+E_2) = (\operatorname{sign}(E_1), \operatorname{sign}(E_2))$$

Beispiele hierzu:
$\operatorname{sign}((x+5)e^{-3x}) = (-1,1)$, $\operatorname{sign}(4e^x) = 1$, $\operatorname{sign}(-x^2 e^{2x}) = (-1,1,-1)$
$\operatorname{sign}((x+5)e^{-3x} + 4e^x - x^2 e^{2x}) = (-1,1,1,-1,1,-1)$

Bemerkung:

a. Die Zahl der Komponenten des Vorzeichenvektors sign(E) ist gleich dem Grad von E.

b. Für $E(x)=\sum_{i=1}^{N} a_i e^{t_i x}$ mit grd(E)=N gibt die i-te Komponente von sign(E) das Vorzeichen von a_i an.

Definition 1.7

Es sei S ein Vorzeichenvektor mit N Komponenten.

a. $V_N(S)=\{E \mid E \in V_N, (\mathrm{sign}(E)=S) \vee$ (man erhält sign(E) aus S durch Streichen von Komponenten in S) $\}$

$V_N(S)$ ist die Vorzeichenklasse zu S in V_N.

b. $V_N^o(S)=V_N(S) \cap V_N^o$

Bemerkung 1.3

a. $V_N^+=V_N^o(1,1,\ldots,1)=V_N(1,1,\ldots,1)$

Entsprechendes gilt für V_N^-.

b. $E \in V_N$ mit grd(E)<N gehört zu mehreren Vorzeichenklassen in V_N, wie die Beispiele zu Definition 1.6 zeigen. Nur die Elemente von $V_N - V_{N-1}$ gehören zu genau einer Vorzeichenklasse, so daß damit in $V_N - V_{N-1}$ eine Einteilung in disjunkte Teilmengen erklärt ist.

Der folgende Satz stellt eine Beziehung zwischen der Zahl der Nullstellen einer Exponentialsumme und ihrem Vorzeichenvektor her.

Satz 1.3 (Braess, [1])

Voraussetzung: Es sei $E \in V_N$ mit grd(E)=N$\geq$1 gegeben und E besitze m reelle Nullstellen.

Behauptung: In S=sign(E) gibt es mindestens m Vorzeichenwechsel, d.h. es gibt mindestens m Komponenten S_i von S mit

$$S_i \neq S_{i+1} \ .$$

Beweis: Vollständige Induktion nach N:

N=1: $E(x)=ae^{tx}$ besitzt nach Voraussetzung keine reelle Nullstelle.

Der Satz sei gezeigt für N-1.

Induktionsschluß: $E(x)=\sum_{i=1}^{L} P_i(x) e^{t_i x} \in V_N$ mit der Länge L habe m>o reelle Nullstellen; für m=o ist nichts zu zeigen.

In S liegt damit mindestens ein Vorzeichenwechsel vor, denn sonst gilt nach Bemerkung 1.3a $|E(x)|>0$ für $x\in\mathbb{R}$ im Widerspruch zu $m>0$.
Es sei also $w>0$ die Zahl der Vorzeichenwechsel in S; k sei der kleinste Index mit $S_k=-S_{k+1}$.

1. Fall:
$$E(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i e^{t_i x} + \sum_{i=k+1}^{L} P_i(x) e^{t_i x}$$

Für $E_1(x)=e^{-t_k x}E(x)$ gilt
$$DE_1(x)=\sum_{i=1}^{k-1}(t_i-t_k)a_i e^{(t_i-t_k)x} + \sum_{i=k+1}^{L}(DP_i(x)+P_i(x)(t_i-t_k))e^{(t_i-t_k)x}.$$

E_1 hat die gleichen Nullstellen wie E und $\mathrm{sign}(E_1)=\mathrm{sign}(E)$.
Beachtet man $t_i<t_k$ für $i<k$, so liegen in $\mathrm{sign}(DE_1)$ $w-1$ Vorzeichenwechsel vor. Nach dem Satz von Rolle besitzt DE_1 mindestens $m-1$ reelle Nullstellen. Wegen $DE_1\in V_{N-1}$ erhält man nach Induktionsannahme $w-1\geqq m-1$, also $w\geqq m$.

2. Fall:
$$E(x)=\sum_{i=1}^{L} P_i(x)e^{t_i x} \quad \text{mit } \mathrm{grd}(P_1)\geqq 1. \text{ Es ist also } k=1.$$

$$E_1(x)=e^{-t_1 x}E(x)=P_1(x)+\sum_{i=2}^{L}P_i(x)e^{(t_i-t_1)x}$$

$$DE_1(x)=DP_1(x)+\sum_{i=2}^{L}(DP_i(x)+(t_i-t_1)P_i(x))e^{(t_i-t_1)x}$$

In $\mathrm{sign}(DE_1)$ liegen $w-1$ Vorzeichenwechsel vor, wie man durch Vergleich mit E_1 erkennt; damit folgt wie in Fall 1: $w\geqq m$.

3. Fall:
$$E(x)=\sum_{i=1}^{k-1}a_i e^{t_i x} + \sum_{i=k}^{L}P_i(x)e^{t_i x} \quad \text{mit } \mathrm{grd}(P_k)\geqq 1.$$

$$E_1(x)=e^{-t_k x}E(x)=\sum_{i=1}^{k-1}a_i e^{(t_i-t_k)x}+P_k(x)+\sum_{i=k+1}^{L}P_i(x)e^{(t_i-t_k)x}$$

$$DE_1(x)=\sum_{i=1}^{k-1}a_i(t_i-t_k)e^{(t_i-t_k)x}+DP_k(x)+$$
$$+\sum_{i=k+1}^{L}(DP_i(x)+P_i(x)(t_i-t_k))e^{(t_i-t_k)x}$$

Mit den gleichen Überlegungen wie oben erhält man auch hier $w\geqq m$.
Damit ist der Satz vollständig bewiesen.